Radboud Universiteit Nijmegen

Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica

Afbeeldingen tussen matrixalgebra's

Dorianne van Dijk, 4056469
Bachelor Wiskunde
Begeleider: Dr. W.D. van Suijlekom

1 juli 2013

1 juli 2013

[Samenvatting]

De eerste vraag die we willen oplossen in deze scriptie is: "hoe zien de homomorfismen tussen halfenkelvoudige algebra's eruit?" Aangezien elke halfenkelvoudige algebra isomorf is aan een matrixalgebra, kunnen we ons beperken tot homomorfismen van matrixalgebra's. Elk wezenlijk verschillend homomorfisme correspondeert op een basistransformatie na met een Bratteli diagram. We specificeren hierna de basistransformaties, zodat we alle mogelijke homomorfismen in termen van Bratteli diagrammen weer kunnen geven. We zien dat bij de basistransformaties de commutant van het beeld een belangrijke rol speelt. We werken deze uit en introduceren een duaal Bratteli diagram. We bestuderen de relatie tussen dit diagram en de commutant. Als laatst bekijken we (matrixalgebra)-representaties van quivers. We bestuderen wat de ruimte van representaties modulo equivalentie is en geven een aantal specifieke voorbeelden.

Inhoudsopgave

1 Inleiding **7**

2 Inleidende definities **9**

2.1 Algebra's 9

2.2 Representaties 10

2.3 Idealen 12

3 Halfenkelvoudige algebra's **14**

3.1 Structuur van halfenkelvoudige algebra's 14

3.2 Homomorfismen tussen halfenkelvoudige algebra's 19

3.3 Bratteli diagrammen 20

4 Relaties tussen homomorfismen van halfenkelvoudige algebra's **23**

4.1 Inleidende definities uit de groepentheorie 23

4.2 Specificatie van de basistransformaties 24

4.3 Het duale Bratteli diagram 29

4.4 Automorfismen 32

5 Quivers **35**

Bibliography **40**

1 Inleiding

Een 'ongeveer' eindig dimensionale C^*-algebra A, een AF algebra, is een limiet van eindig dimensionale C^* algebra's:

$$A = \lim_{i \to \infty} A_i.$$

Elke C^* algebra is isomorf met een matrixalgebra over $\mathbb{C}$ en daarom kunnen de homomorfismen tussen deze algebra's precies beschreven worden. Ola Bratteli is een Noorse wiskundige. Hij beschreef in 1972 in zijn artikel [2] hoe die afbeeldingen tussen C^*-algebra's eruit zien en hoe je aan de hand daarvan een diagram kan maken voor een AF algebra. Het blijkt dat zijn geconstrueerde diagrammen mooie eigenschappen hebben. Zo kun je bijvoorbeeld uit een gegeven diagram alle diagrammen construeren die corresponderen met een AF-algebra die isomorf is aan de originele. Mooie voorbeelden van deze diagrammen zijn te vinden in [1].

De door Bratteli bedachte diagrammen werden later Bratteli diagrammen genoemd. Ze zijn erg handig om kenmerken van AF algebra's te weten te komen. Ze zijn tevens ook de aanleiding voor deze scriptie. Deze scriptie bekijkt de diagrammen echter in een wat andere context. Het begrip Bratteli diagram wordt geïntroduceerd voor een halfenkelvoudige algebra. Daartoe wordt eerst bewezen dat elke halfenkelvoudige algebra isomorf is met een matrixalgebra, een algebra van de vorm $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$. Daarna worden de homomorfismen tussen twee matrixalgebra's op een basistransformatie na beschreven. Bij elk wezenlijk verschillend homomorfisme wordt dan een Bratteli diagram gemaakt. Het aantal mogelijke homomorfismen tussen een matrixalgebra A en B correspondeert op een basistransformatie na precies met het aantal mogelijke Bratteli diagrammen bij A en B.

Vervolgens vertelt deze scriptie meer over de basistransformaties. Voor een gegeven Bratteli diagram $\mathbb{B}$ bij matrixalgebra's A en B worden de basistransformaties $\phi_g(\cdot)$ gegeven door $g\phi_{\mathbb{B}}(\cdot)g^{-1}$ voor een $g \in GL(B)$. Onder conjugerende werking van $GL(B)$ op de verzameling van homomorfismen, geeft de baan van $\phi_{\mathbb{B}}$ alle homomorfismen die ontstaan zijn uit een basistransformatie. De baan blijkt te worden gegeven door $GL(B)$ modulo de commutant van $\phi(A) \subset B$. Vervolgens wordt bepaald hoe de commutant er precies uit ziet en worden Bratteli diagrammen gerelateerd aan dit onderwerp. Het duale Bratteli diagram wordt geïntroduceerd en deze correspondeert met een homomorfisme van de commutant naar de algebra B.

Alle mogelijke homomorfismen tussen twee matrixalgebra's zijn dus precies bepaald in termen van Bratteli diagrammen. Het is een logisch gevolg om vanuit hier netwerken van homomorfismen te bekijken. Dit wordt gedaan door middel van quivers, gerichte grafen met mogelijke lussen en meer kanten tussen twee vertices. Een representatie van een quiver is een toewijzing van matrixalgebra's aan de vertices en homomorfismen aan de kanten. De toewijzing van de matrixalgebra's wordt vast genomen. Omdat bekend is hoe alle homomorfismen eruit zien, kan simpel worden bepaald hoe de ruimte van represenaties eruit ziet. Representaties π en π' zijn equivalent als er een collectie automorfismen $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ is, zodat $\pi_e = \alpha_{t(e)} \circ \pi'_e \circ \alpha_{s(e)}$ voor elke kant e. De collectie van automorfismen werkt op de ruimte van representaties. Op deze manier kan algemeen worden bepaald hoe de ruimte van representaties modulo equivalentie in termen van Bratteli diagrammen eruit. In een aantal voorbeelden wordt deze ruimte specifiek.
Het blijkt dus dat ook automorfismen een belangrijke rol spelen. Deze worden dan ook uitvoerig behandeld in de sectie voorafgaand aan die over quivers. De verzameling van automorfismen van een algebra A blijkt gelijk te zijn aan $PGL(A) \rtimes S(A)$, waar $S(A)$ de verzameling van permutaties van blokken van A van gelijke dimensies is.

Het idee om te kijken naar deze quivers is afkomstig van Matilde Marcolli en Walter D. van Suijlekom en te lezen in hun artikel [3]. Zij definiëren een representatie van een quiver als een toewijzing van objecten van een categorie aan de vertices en homomorfismen aan de kanten. Ze bekijken in het bijzonder de categorie waarvan de objecten bestaan uit eindig spectrale tripels.

Door het vak Eindig-dimensionale algebra's te volgen is mijn interesse gewekt voor dit gebied van de wiskunde. Tijdens dit vak heb ik veel kennis opgedaan over algebra's en in het bijzonder ook over halfenkelvoudige algebra's en represenatietheorie. We werkten met het boek *Introduction to representation theory* [5]. Veel van die kennis heb ik kunnen gebruiken als opstapje voor mijn scriptie. Mijn eerste doel was het beschrijven van de homomorfismen tussen matrixalgebra's. Daarvoor heb ik gebruik gemaakt van een propositie uit het boek [4], geschreven door G. Landi. Het bewijs bestond uit een kleine vijf regels. Daar heb ik een duidelijkere en uitgebreide versie van gemaakt. Daarna ben ik verder gegaan met de basistransformaties en heb ik me vooral beziggehouden met de relaties tussen de commutant en het Bratteli diagram. Hierbij heb ik veel gebruik gemaakt van kennis van het vak Symmetrie. Toen ik alle mogelijke homomorfisme beschreven had, waren er meerdere wegen mogelijk om op te gaan. Uiteindelijk zijn dat representaties van quivers geworden. Ik vertaalde de quivers van eindige spectrale tripels uit het artikel [3] naar mijn eigen context. Ik heb met heel veel plezier aan deze scriptie gewerkt en vond het erg leuk om me in dit onderwerp te verdiepen. Ik heb ook gezien dat dit onderwerp nauw verwant is met onderwerpen waarvoor Functionaalanalyse vereiste voorkennis is. Een logisch vervolg van deze scriptie zou dan ook zijn de onderwerpen die ik behandeld heb, in een andere setting te bekijken, waarvoor deze kennis nodig is. Omdat mij dat erg leuk lijkt, ga ik volgend jaar het vak Functionaalanalyse nog volgen.

2 Inleidende definities

2.1 Algebra's

Definitie 2.1. Een *algebra over een lichaam k* is een vectorruimte A over k met een k-bilineaire vermenigvuldiging $A \times A \to A$, $(a, b) \to a \bullet b$. Naast de eigenschappen van een vectorruimte heeft A dus de volgende extra eigenschappen:

(i) $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$ voor alle $a, b, c \in A$
(ii) $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ voor alle $a, b, c \in A$
(iii) $a \bullet \lambda b = \lambda(a \bullet b) = (\lambda a) \bullet b$ voor alle $a, b \in A$, voor alle $\lambda \in k$

We noteren voor $a \bullet b$ in het vervolg ab.

Definitie 2.2. Een *associatieve algebra* is een algebra A over een lichaam k die voldoet aan $(ab)c = a(bc)$ voor alle $a, b, c \in A$.

Definitie 2.3. Een *unitale algebra* is een algebra A over een lichaam k die een neutraal element bevat; er is een $1 \in A$ zodat $1a = a1 = a$ voor alle $a \in A$.

Opmerking 2.4. Als een algebra A een neutraal element heeft, is deze uniek. Stel dat 1 en $1'$ neutrale elementen van A zijn. Dan geldt $1 = 11' = 1'$.

Voorbeeld 2.5. De verzameling van $(n \times n)$-dimensionale matrices met coëfficiënten uit het lichaam k, genoteerd als $\mathbb{M}_n(k)$, is een unitale associatieve algebra over het lichaam k. De bilineaire vermenigvuldiging is de gewone matrixvermenigvuldiging en de eenheidsmatrix is het neutrale element.

Voorbeeld 2.6. Definieer $\mathrm{End}(V) := \{f : V \to V \mid f \text{ een lineaire transformatie}\}$. Wanneer V een vectorruimte over k is, is $\mathrm{End}(V)$ een unitale associatieve algebra over k. De bilineaire vermenigvuldiging van twee elementen ϕ en ψ uit $\mathrm{End}(V)$ is de compositie van ϕ en ψ. Het neutrale element is de identieke transformatie $f : V \to V$ met $f(v) = v$ voor alle $v \in V$.

Definitie 2.7. De *directe som* van de algebra's $A_1, \ldots A_n$, genoteerd als $A := A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, is de directe som van $A_1, \ldots, A_n$ gezien als vectorruimten. De vermenigvuldiging van A is als volgt gedefinieerd: $ab = (a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$ voor alle $a, b \in A$.

Definitie 2.8. Zij $A = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ met $r, d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{N}$ een algebra. We noemen A een *matrixalgebra.*

Voor het vervolg nemen we aan dat een algebra A over een lichaam k associatief en unitaal is.

Definitie 2.9. Zij A en B twee algebra's en $\phi : A \to B$ een lineaire afbeelding. Dan heet ϕ een *homomorfisme van algebra's* als hij voldoet aan de volgende twee eigenschappen:

(i) $\phi(a_1a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2)$
(ii) $\phi(1_A) = 1_B$.

Hierbij zijn 1_A en 1_B het neutraal element in A respectievelijk B.

Definitie 2.10. Een *isomorfisme van algebra's* is een bijectief homomorfisme van algebra's.

Opmerking 2.11. Zij A en B twee algebra's over het lichaam k en $\theta : A \to B$ een bijectief homomorfisme van algebra's. Dan is θ^{-1} ook een homomorfisme van algebra's, want voor alle $b, b_1, b_2 \in B$ en $a, a_1, a_2 \in A$ met $\theta^{-1}(b) = a$, $\theta^{-1}(b_1) = a_1$, $\theta^{-1}(b_2) = a_2$ geldt:

(i) $\theta^{-1}(b_1 + b_2) = \theta^{-1}(\theta(a_1) + \theta(a_2)) = \theta^{-1}(\theta(a_1 + a_2)) = a_1 + a_2 = \theta^{-1}(b_1) + \theta^{-1}(b_2)$
(ii) $\theta^{-1}(\lambda b) = \theta^{-1}(\lambda\theta(a)) = \theta^{-1}(\theta(\lambda a)) = \lambda a = \lambda\theta^{-1}(b)$ voor alle $\lambda \in k$
(iii) $\theta^{-1}(b_1b_2) = \theta^{-1}(\theta(a_1)\theta(a_2)) = \theta^{-1}(\theta(a_1a_2)) = a_1 \cdot a_2 = \theta^{-1}(b_1)\theta^{-1}(b_2)$

Definitie 2.12. Een *automorfisme* van een algebra A is een isomorfisme $\alpha : A \to A$. We noteren $\mathrm{Aut}(A)$ voor de verzameling van alle automorfismen van A.

Propositie 2.13. *Er is een isomorfisme van algebra's tussen* $\mathrm{End}(k^n)$ *en* $\mathbb{M}_n(k)$.

Bewijs. Definieer $\Phi : \mathbb{M}_n(k) \to \mathrm{End}(k^n)$, $A \mapsto \phi_A$ met $\phi_A(c) = Ac$ voor alle $c \in k^n$, beschouwd als kolomvector. Het is duidelijk dat $\mathrm{Im}\,\Phi \subset \mathrm{End}(k^n)$. De afbeelding Φ is een homomorfisme:

(i) $\Phi(A+B)(c) = \phi_{A+B}(c) = (A+B)c = Ac + Bc = \phi_A(c) + \phi_B(c) = \Phi(A)(c) + \Phi(B)(c)$ voor alle $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$, voor alle $c \in k^n$

(ii) $\Phi(\lambda A)(c) = \phi_{\lambda A}(c) = (\lambda A)c = \lambda(Ac) = \lambda\phi_A(c) = \lambda\Phi(A)(c)$ voor alle $A \in \mathbb{M}_n(k)$, voor alle $\lambda \in k$

(iii) $\Phi(AB)(c) = \phi_{AB}(c) = (AB)c = A(Bc)$. Aan de andere kant hebben we dat: $\Phi(A) \circ \Phi(B)(c) = \phi_A \circ \phi_B(c) = \phi_A(\phi_B(c)) = A\phi_B(c) = A(Bc)$.

Definieer $\Phi' : \mathrm{End}(k^n) \to \mathbb{M}_n(k)$, $\phi \to ((\phi(e_1)), \ldots, (\phi(e_n)))$ met e_i de kolomvectorvector bestaande uit een 1 op de i-de plaats en verder overal nullen. Deze vectoren vormen tevens een basis voor k^n.
We bewijzen dat de afbeelding Φ' de inverse van Φ is. Dan volgt immers dat ook Φ' een homomorfisme is en dan zijn we klaar.

- Zij $A \in \mathbb{M}_n(k)$. Dan hebben we dat $\Phi' \circ \Phi(A) = \Phi'(\phi_A) = ((\phi_A(e_1)), \ldots, (\phi_A(e_n))) = ((A \cdot e_1), \ldots, (A \cdot e_n)) = A$. De laatste stap zie je door simpelweg uitschrijven.
- Zij $\phi \in \mathrm{End}(k^n)$. Dan hebben we dat $\Phi \circ \Phi'(\phi) = \Phi(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)) = \phi_{(\phi(e_1),\ldots,\phi(e_n))}$. En $\phi_{(\phi(e_1),\ldots,\phi(e_n))}(c) = ((\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))\cdot c = \phi(e_1)c_1 + \ldots + \phi(e_n)c_n = \phi(c_1e_1) + \ldots + \phi(c_ne_n) = \phi(c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) = \phi(c)$ voor alle $c \in k^n$, aangezien ϕ een k-lineaire transformatie is.

Dus $\mathrm{End}(k^n) \cong \mathbb{M}_n(k)$. □

Definitie 2.14. Een *deelalgebra* van een algebra A is een lineaire deelruimte $B \subset A$ die gesloten is onder de geïnduceerde vermenigvuldiging en het neutrale element bevat.

Propositie 2.15. *Zij* A, B *twee algebra's en* $\phi : A \to B$ *een homomorfisme. Het beeld van* ϕ*:* $\mathrm{Im}\,\phi \subset B$ *is een deelalgebra van* B.

Bewijs. Het eenheidselement is een element van $\mathrm{Im}\,\phi$, wegens eigenschap (ii) uit definitie 2.9. Vervolgens hebben we voor $b_1 = \phi(a_1), b_2 = \phi(a_2) \in \mathrm{Im}\,\phi$ dat $b_1b_2 = \phi(a_1)\phi(a_2) = \phi(a_1a_2) \in \mathrm{Im}\,\phi$. Daarmee is voldaan aan de eisen uit de vorige definitie. □

2.2 Representaties

Definitie 2.16. Een *representatie* van een algebra A is een vectorruimte V tezamen met een homomorfisme van algebra's $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$. Een representatie kan men dus noteren als (V, ρ), maar in de praktijk noemen we alleen de vectorruimte en laten we het homomorfisme achter wege. Daarnaast korten we $\rho(a)v$ vaak af als av.

Voorbeeld 2.17. De vectorruimte k^n is een representatie van $\mathbb{M}_n(k)$ met $\rho : \mathbb{M}_n(k) \to \mathrm{End}(k^n)$, $\rho(A)v = Av$. De afbeelding ρ is dan een homomorfisme van algebra's volgens propositie 2.13.

Voorbeeld 2.18. Zij A een algebra, dan is A zelf ook een representatie. De afbeelding $\rho : A \to \mathrm{End}(A)$ is gedefiniëerd door $\rho(a)(b) = ab$, het gewone product. We gaan makkelijk na dat deze afbeelding inderdaad een homomorfisme is. Deze representatie noemen we de *reguliere representatie* van A.

Voorbeeld 2.19. Zij $A = k$ voor een lichaam k. Dan is een representatie V van A een vectorruimte over k. Het bijbehorende homomorfisme $\rho : k \to \mathrm{End}(V)$ is triviaal.

Definitie 2.20. Een *deelrepresenatie* van een representatie V van een algebra A is een lineaire deelruimte $W \subset V$ die invariant is onder alle afbeeldingen $\rho(a) : V \to V$, $a \in A$. Met andere woorden $\rho(a)(w) \in W$ voor alle $w \in W$, voor alle $a \in A$.

Opmerking 2.21. 0 en V zijn altijd deelrepresentaties van een representatie V.

Definitie 2.22. Een representatie $V \neq 0$ heet *irreducibel* als 0 en V zijn enige deelrepresentaties zijn.

Voorbeeld 2.23. Als $A = k$, dan is A de enige irreducibele representatie van A. Hij is inderdaad irreducibel, want zij $W \neq 0$ een deelrepresentatie van A, dan hebben we dat voor alle $a \in A$, voor alle $w \in W$, er een $w' \in A$ is met $w'w = a$. Dus $W = A$. Omdat alle represenaties van A vectorruimten over k zijn, is A de enige irreducibele.

Propositie 2.24. *Zij $V \neq 0$ een eindig dimensionale representatie van een algebra A. Dan heeft V een irreducibele deelrepresentatie.*

Bewijs. We nemen aan dat V niet irreducibel is, anders kunnen we V zelf als deelrepresentatie nemen. Zij $0 \subsetneq W \subsetneq V$ zodat de dimensie van W minimaal is. Deze kunnen we vinden omdat V eindig dimensionaal is. Stel dat W niet irreducibel is, dan is er een deelrepresentatie W' met $0 \subsetneq W' \subsetneq W$. Dan geldt: $\dim(W') < \dim(W)$ en dit is in tegenspraak met de minimaliteit van de dimensie van W. We hebben dus een irreducibele deelrepresentatie van V gevonden. $\square$

Definitie 2.25. Zij V_1 en V_2 twee representaties van een algebra A. Een *intertwiner of vervlechtingsoperator* $\phi : V_1 \to V_2$ is een lineaire afbeelding met de eigenschap dat hij commuteert met de werking van A, ofwel $\phi(\rho_{V_1}(a)v) = \rho_{V_2}(a)\phi(v)$.

Definitie 2.26. Een *isomorfisme van representaties* is een bijectieve intertwiner.

Opmerking 2.27. Als $\phi : V_1 \to V_2$ een isomorfisme van representaties is, dan is de lineaire afbeelding $\phi^{-1} : V_2 \to V_1$ dit ook. Dit volgt op dezelfde manier als in opmerking 2.11.

Definitie 2.28. Zij $V_1 \dots V_n$ representaties van een algebra A. Dan is de ruimte $\bigoplus_{i=1}^n V_i$ een representatie en het bijbehorende homomorfisme $\rho_{\bigoplus_{i=1}^n V_i}$ werkt als volgt:

$$\rho_{\bigoplus_{i=1}^n V_i}(a)(v_1 \oplus \dots \oplus v_n) = \rho_{V_1}(a)v_1 \oplus \dots \oplus \rho_{V_n}(a)v_n$$

voor $a \in A$, $v_i \in V_i$.

We zullen nu het lemma van Schur gaan bewijzen. Een eenvoudig te bewijzen stelling, maar erg nuttig. We zullen hem later dan ook nog gebruiken.

Stelling 2.29 (Lemma van Schur)**.** *Zij V_1, V_2 twee representaties van een algebra A over een lichaam k en zij $\phi : V_1 \to V_2$ een intertwiner ongelijk aan de nulafbeelding. Dan geldt het volgende:*

(i) Als V_1 irreducibel, dan is ϕ injectief.
(ii) Als V_2 irreducibel, dan is ϕ surjectief.

Als V_1, V_2 beide irreducibel zijn, dan is ϕ dus een isomorfisme.

Bewijs. (i) De kern van ϕ is een deelrepresentatie van V_1, want $\phi(av) = a\phi(v) = 0$. Dus $av \in \ker\phi$ voor alle $v \in \ker\phi$, voor alle $a \in A$. Omdat V_1 irreducibel is geldt $\ker\phi = 0$ of $\ker\phi = V_1$. In het laatste geval zou dit echter betekenen dat $\phi = 0$, hetgeen we hadden uitgesloten. Dus ϕ is injectief.

(ii) Het beeld van ϕ: $\operatorname{Im}\phi$ is een deelrepresentatie van V_2, want voor een $w \in \operatorname{Im}\phi$ en $v \in V_1$ met $\phi(v) = w$ geldt: $aw = a\phi(v) = \phi(av) \in \operatorname{Im}\phi$. Omdat V_2 irreducibel is geldt $\operatorname{Im}\phi = V_2$ (want $\operatorname{Im}\phi \neq 0$). Dus ϕ is surjectief.

□

Stelling 2.30 (Lemma van Schur voor algebraïsch afgesloten lichamen)**.** *Zij V een eindig dimensionale irreducibele representatie van een algebra A over een algebraïsch afgesloten lichaam k en zij $\phi : V \to V$ een intertwiner. Dan geldt $\phi = \lambda\mathbb{I}$ voor een $\lambda \in k$.*

Bewijs. Zij λ een eigenwaarde van ϕ. Dit is een nulpunt van het karakteristieke polynoom van ϕ en bestaat aangezien k algebraïsch afgesloten is. Bekijk de afbeelding $\phi - \lambda\mathbb{I}$. Dit is een intertwiner, want hij is linear en er geldt:

$$(\phi - \lambda\mathbb{I})(av) = \phi(av) - \lambda\mathbb{I}(av) = a\phi(v) - a\lambda\mathbb{I}(v) = a(\phi - \lambda\mathbb{I})(v)$$

voor $a \in A, v \in V$. De determinant van deze afbeelding is nul en dus heeft de afbeelding geen inverse. Het kan dus geen isomorfisme zijn en we concluderen dan omdat V irrecucibel is met de vorige stelling dat $\phi - \lambda\mathbb{I}$ de nulafbeelding is. □

2.3 Idealen

Definitie 2.31. Een *links-ideaal* van een algebra A is een deelruimte $I \subset A$ zodanig dat $ia \in A$, voor alle $i \in I$, voor alle $a \in A$. Op dezelfde manier kunnen we een *rechts-ideaal* van A definiëren. Er geldt dan $ai \in A$, voor alle $i \in I$, voor alle $a \in A$. Wanneer I een links- en een rechts-ideaal is, noemen we I een *tweezijdig ideaal*.

Opmerking 2.32. Een links-ideaal I van een algebra A is een deelrepresentatie van de reguliere representatie. Hij is namelijk per definitie invariant onder alle lineaire afbeeldingen $\phi : I \to I$. Een rechts-ideaal I van een algebra A is een deelrepresentatie van de reguliere represenatie van A^{op}. Hier is A^{op} de algebra bestaande uit dezelfde elementen als A maar met omgekeerde vermenigvuldiging.

Propositie 2.33. *Zij $\phi : A \to B$ een homomorfisme van algebra's. Dan is* $\ker\phi$ *een tweezijdig ideaal.*

Bewijs. Zij $v \in \ker\phi$ en $a \in A$, dan geldt $\phi(av) = \phi(a)\phi(v) = \phi(a) \cdot 0 = 0$. Dus $av \in \ker\phi$. Net zo volgt $va \in \ker\phi$. Dus $\ker\phi$ is een tweezijdig ideaal. □

Propositie 2.34. *Zij A een algebra en I een tweezijdig ideaal van A, dan is A/I de verzameling van nevenklassen van I. Zij nu $\pi : A \to A/I$, de quotiëntafbeelding. Dan is A/I een algebra met vermenigvuldiging $\pi(a)\pi(b) := \pi(ab)$.*

Bewijs. Het enige wat we hoeven te bewijzen is dat de vermenigvuldiging die we gemaakt hebben, goed gedefinieerd is. Zij $a, b \in A$. Stel $\pi(a) = \pi(a')$ dan:

$$\pi(a'b) = \pi(ab + (a' - a)b) = \pi(ab) + \pi((a' - a)b) = \pi(ab) + \pi(a' - a)\pi(b) = \pi(ab),$$

wegens het feit dat $\pi(a' - a) \in I$.
Stel $\pi(b) = \pi(b')$ dan:

$$\pi(ab') = \pi(ab + a(b' - b)) = \pi(ab) + \pi(a(b' - b)) = \pi(ab) + \pi(a)\pi(b' - b) = \pi(ab),$$

wegens het feit dat $\pi(b' - b) \in I$. De vermenigvuldiging is dus goed gedefinieerd en dus is A/I een algebra. □

Definitie 2.35. Voor een algebra A en een tweezijdig ideaal $I \subset A$ is A/I zoals in de vorige propositie gedefinieerd de *quotiënt algebra* van A modulo I.

Opmerking 2.36. Hetzelfde kunnen we ook doen voor een representatie V van een algebra A en een deelrepresentatie $W \subset V$. Zij $\pi : V \to V/W$ de quotiëntenafbeelding. Dan is V/W ook een representatie met de volgende werking: $\rho_{V/W}\pi(x) := \pi(\rho_V(a)x)$ voor $x \in V$.

Stelling 2.37 (Eerste isomorfiestelling voor algebra's)**.** *Zij A en B twee algebra's en $f : A \to B$ een homomorfisme. Er geldt:*

$$A/\ker f \cong \operatorname{Im} f.$$

Wanneer f surjectief is, hebben we dat $A/\ker f \cong B$.

Bewijs. Laat $\pi : A \to A/kerf$ de quotiëntenafbeelding zijn. Dat deze afbeelding goed gedefinieerd is volgt uit vorige propositie. We maken een afbeelding $\phi : A/\ker f \to \operatorname{Im} f$, $\pi(a) \mapsto f(a)$ voor alle $a \in A$. We gaan eerst na dat dit een homomorfisme is:

- $\phi(\pi(1_A)) = f(1_A) = 1_B$
- voor alle $\pi(a_1), \pi(a_2) \in A/\ker f$ geldt $\phi(\pi(a_1)\pi(a_2)) = \phi(\pi(a_1a_2)) = f(a_1a_2)$. Anderzijds is $\phi(\pi(a_1))\phi(\pi(a_2)) = f(a_1)f(a_2) = f(a_1a_2)$.

Vervolgens gaan we bewijzen dat de afbeelding bijectief is. Het is duidelijk dat de afbeelding surjectief is. We tonen dus nog aan dat de afbeeldin injectief is: we nemen $\pi(a_1), \pi(a_2) \in A/\ker f$ met $\phi(\pi(a_1)) = \phi(\pi(a_2))$. Er geldt dan:

$$0 = \phi(\pi(a_1)) - \phi(\pi(a_2)) = f(a_1) - f(a_2) = f(a_1 - a_2),$$

dus $a_1 - a_2 \in \ker f$. Dus $\pi(a_1) = \pi(a_2)$. De afbeelding is dus ook injectief. Hiermee hebben we de eerste isomorfiestelling bewezen. Merk op dat de afbeelding goed gedefinieerd is op dezelfde manier als in de vorige propositie. $\square$

Definitie 2.38. Het *radicaal* van een eindig dimensionale algebra A is de verzameling van elementen uit A die als 0 werken op alle irreducibele representaties van A. Dus:

$$\operatorname{Rad}(A) := \{a \in A \mid \rho(a)v = 0, \text{voor alle } v \in V, \text{voor alle irreducibele representaties } V \text{ van } A\}.$$

Propositie 2.39. *Rad(A) is een tweezijdig ideaal.*

Bewijs. Zij $a \in A$ en $r \in \operatorname{Rad}(A)$. Zij V een willekeurige irreducibele representatie van A en $v \in V$. Dan geldt $\rho(ar)v = \rho(a)\rho(r)v = \rho(a) \cdot 0 = 0$. Dus $ar \in \operatorname{Rad}(A)$. En $\rho(ra)v = \rho(r)\rho(a)v = 0$, want $\rho(a)v$ is ook een element uit V en dus werkt a hierop als 0. Dus $ra \in \operatorname{Rad}(A)$. Hieruit volgt dan dat $\operatorname{Rad}(A)$ een tweezijdig ideaal is. $\square$

Definitie 2.40. Een eindig dimensionale algebra A is halfenkelvoudig als zijn radicaal, $\operatorname{Rad}(A)$, gelijk is aan 0.

3 Halfenkelvoudige algebra's

3.1 Structuur van halfenkelvoudige algebra's

Definitie 3.1. Een representatie V van A heet *halfenkelvoudig* als hij isomorf is met een directe som van irreducibele representaties.

Voorbeeld 3.2. Zij V een irreducibele representatie van A. Dan is $\mathrm{End}(V)$ halfenkelvoudig. We zijn klaar als we aantonen dat $\mathrm{End}(V) \cong nV$, waar nV staat voor de directe som van n kopiën van V. Zij $v_1, \ldots, v_n$ een basis voor V, definieer dan: $\varrho : \mathrm{End}(V) \to nV$, $\phi \mapsto (\phi(v_1), \ldots \phi(v_n))$. We kunnen makkelijk nagaan dat dit een isomorfisme van representaties is.

We zullen in deze paragraaf gaan aantonen dat elke halfenkelvoudige algebra over een algebraïsch afgesloten lichaam isomorf is met een directe som van matrixalgebra's.

Propositie 3.3. *Zij $V_1 \ldots V_m$ irreducibele eindig dimensionale paarsgewijs niet isomorfe representaties van een algebra A en W een deelrepresentatie van $V = \oplus_{i=1}^m n_i V_i$. Hierbij noteren we de directe som van n_i kopieën van V_i als $n_i V_i$. Dan is W isomorf met $\oplus_{i=1}^m r_i V_i$ met $r_i \leq n_i$ en de inbedding $\phi : W \hookrightarrow V$ is een directe som van inbeddingen $\phi_i : r_i V_i \hookrightarrow n_i V_i$. Deze wordt gegeven door de vermenigvuldiging van een rijvector van elementen van V_i met lengte r_i, met een $(r_i \times n_i)$-matrix X_i met lineair onafhankelijke rijen: $\phi(v_1, \ldots, v_{r_i}) = (v_1, \ldots v_{r_i}) X_i$.*

Bewijs. We bewijzen deze propositie met inductie naar $n := \sum_{i=1}^m n_i$. Voor $n = 1$ geldt dat $V = V_i$ voor een $i \in \{1, \ldots, m\}$, omdat n_i een positief geheel getal is voor alle $i \in \{1, \ldots, m\}$. Een deelrepresentatie W van V is dan gelijk aan 0 of V, omdat V_i irreducibel is. En dus is W van de gevraagde vorm met $r_i = 0$ of $r_i = n_i$.

Vervolgens nemen we aan dat we de propositie voor $n - 1$ bewezen hebben en gaan we hem bewijzen voor n. Zij $W \neq 0$ een deelrepresentatie van V (anders konden we $r_i = 0$ voor alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ nemen). Neem een irreducibele deelrepresentatie $P \subset W$. Dit kan wegens propositie 2.24. Omdat ϕ niet de nulafbeelding is (want $P \neq 0$), volgt met het lemma van Schur dat P isomorf is met een V_i voor een $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dus de inclusie $\phi|_P : P \hookrightarrow V$ komt overeen met $\phi|_P : P \hookrightarrow n_i V_i$, $v \mapsto (vq_1, \ldots, vq_{n_i})$ met $q_1, \ldots, q_{n_i}$ niet allemaal 0.

Zij $G_i = GL(n_i)$ de groep van alle inverteerbare $(n_i \times n_i)$-matrices over het lichaam k. Deze werkt op $n_i V_i$ door: $(v_1, \ldots, v_{n_i}) \mapsto (v_1, \ldots, v_{n_i}) g_i$ voor alle $g_i \in G_i$ en voor $(v_1, \ldots, v_{n_j}) \in n_j V_j, j \neq i$ als de identiteit. Daarmee staat ook vast hoe G_i op V werkt. De werking van g_i op de matrix X_i geeft $X_i g_i$ en blijft X_j voor $j \neq i$. We zullen later uitgebreid terugkomen op de werking van groepen in paragraaf 4.1.

We kunnen nu $g_i \in G_i$ vinden, zodat $(q_1, \ldots, q_{n_i}) g_i = (1, 0, \ldots, 0)$. Er geldt nu dat $W g_i$ de eerste term V_i van $n_i V_i$ bevat. Dus $W g_i \cong V_i \oplus W'$, waar $W' \subset n_1 V_1 \oplus \ldots \oplus (n_i - 1) V_i \oplus \ldots \oplus n_m V_m$ de kern van de projectie van $W g_i$ naar de eerste term V_i van $n_i V_i$ is. De vectorruimte W' is een deelrepresentatie van $V' = \bigoplus_{j=1}^m n'_j V_j$ met $\sum_{i=1}^m n'_j = n - 1$, waar

$$n'_j = \begin{cases} n_j - 1 & \text{als } j = i \\ n_j & \text{anders} \end{cases}.$$

We kunnen nu dus de inductieaanname toepassen. Er geldt dus $W' \cong \bigoplus_{i=1}^m r'_i V_i$ met $r'_i \leq n'_i$. Dus $W g_i \cong V_i \oplus \bigoplus_{i=1}^m r'_i V_i$. We hebben dan de bijbehorende inclusieafbeelding $W' \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^m n'_i V_i$ en bijbehorende matrix X'_i (uit de inductie aanname) en daarmee hebben we de inclusieafbeelding $W \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^m V_i$ die gegeven wordt door vermenigvuldiging met:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X'_i \end{pmatrix} g_i.$$

□

Propositie 3.4. *Zij V een eindig dimensionale representatie van een algebra A over een lichaam k, waarbij k algebraïsch afgesloten is, en $v_1, \ldots v_n \in V$ onafhankelijke vectoren. Dan bestaat er voor elke $w_1, \ldots, w_n \in V$ een element $a \in A$ zodat $av_i = w_i$.*

Bewijs. Stel dat dit niet geldt, dan zien we dat de afbeelding $\theta : A \to nV$, $a \mapsto (av_1, \ldots, av_n)$ niet surjectief is en dus is $\operatorname{Im}\theta$ een deelrepresentatie ongelijk aan nV. Laat X de $(r \times n)$-matrix zijn, met $r < n$, zoals in de vorige propositie. Neem nu $a = 1$. We zien dat er dan vectoren $u_1, \ldots, u_r \in V$ zijn met $(u_1, \ldots, u_r)X = (v_1, \ldots, v_n)$. Zij $q \neq 0$ zodat $X(q_1, \ldots, q_n)^T = 0$. Zo'n vector kunnen we altijd vinden. Dan is $\sum q_i v_i = (u_1, \ldots, u_r)X(q_1, \ldots, q_n)^T = 0$. Dus $\sum q_i v_i = 0$. Omdat $v_1, \ldots v_n$ onafhankelijk zijn volgt $q_i = 0$ voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dit is in tegenspraak met de eis dat $q \neq 0$. □

Stelling 3.5 (Dichtheidsstelling)**.** *(i) Zij V een irreducibele eindig dimensionale representatie van A, waarbij A zoals in propositie 3.4, dan is de afbeelding $\rho : A \to \operatorname{End}(V)$ surjectief.*

(ii) Zij $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, met V_i irreducibele paarsgewijs niet isomorfe representaties van A. Dan is de afbeelding $\oplus_{i=1}^r \rho_i : A \to \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$ surjectief.

Bewijs. (i) Zij $\phi \in \operatorname{End}(V)$ en zij $v_1, \ldots, v_n$ een basis voor V. Definineer $w_i = \phi(v_i)$. Volgens de vorige propositie is er een $a \in A$ met $av_i = w_i$ voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dan geldt: $\rho(a)v_i = av_i = w_i = \phi(v_i)$. En dus heeft ϕ een origineel.

(ii) Omdat $\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$ halfenkelvoudig is (voorbeeld 3.2), is hij isomorf met $\oplus_{i=1}^r d_i V_i$, waar $\dim V_i = d_i$. Het beeld $\operatorname{Im} \oplus_{i=1}^r \rho_i$ is een deelrepresenatie van $\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$. We kunnen Propositie3.3 toepassen en daaruit volgt dat $\operatorname{Im} \oplus_{i=1}^r \rho_i \cong \oplus_{i=1}^r \operatorname{Im} \rho_i$. Elke ρ_i is surjectief uit deel (i) van deze stelling, dus is ook $\oplus_{i=1}^r \rho_i$ surjectief.

□

Stelling 3.6. *Zij A een eindig dimensionale algebra over een lichaam k met k algebraïsch afgesloten. Dan heeft A slechts eindig veel irreducibele representaties V_i (op isomorfisme na). Deze representaties zijn eindig dimensionaal en*

$$A/\operatorname{Rad}(A) \cong \bigoplus_i End(V_i).$$

Bewijs. Zij V een irreducibele representatie van A. We zien dat Av een deelrepresentatie is van V voor elke $v \neq 0, v \in V$. Omdat V irreducibel is en $aV \neq 0$, geldt $Av = V$ en dus is V eindig dimensionaal.

Stel dat $V_1, \ldots, V_r$ irreducibele representaties, paarsgewijs niet isomorf. Dan is het homomorfisme

$$\bigoplus_i \rho_i : A \to \bigoplus_i \operatorname{End}(V_i)$$

volgens de dichtheidsstelling surjectief. En dus geldt $r \leq \sum_i \dim \operatorname{End}(V_i) \leq \dim A$ en dus zijn er maar eindig veel irreducibele representaties.

Zij nu $V_1 \ldots V_r$ alle irreducibele representaties van A. Dan is de afbeelding $\bigoplus_i \rho_i$ zoals hierboven surjectief. In de kern van deze afbeelding zitten alle elementen uit A die op elke irreducibele representatie als 0 werken. Dus de kern is precies $\operatorname{Rad}(A)$. Met de eerste isomorfiestelling volgt het gevraagde isomorfisme. □

Opmerking 3.7. Zij $A_1, \ldots, A_n$ algebra's met eenheden $1_1, \ldots, 1_n$. Zij $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Dan geldt $1_i 1_j = \delta_{ij} 1_i$ en de eenheid van A is $1 = 1_1 + \ldots + 1_n$. Voor elke representatie (V, ρ) van A geldt dat $(1_i V, \rho_i)$ een representatie is van A_i voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, waarbij $\rho_i = \rho|_{1_i V}$.
Andersom hebben we dat als $(V_1, \rho_1), \ldots, (V_n, \rho_n)$ representaties van respectievelijk $A_1, \ldots, A_n$ zijn dan is $(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n, \rho_{V_1 \oplus \cdots \oplus V_n})$ een representatie van A waarbij $\rho_{V_1 \oplus \cdots \oplus V_n}((a_1, \ldots, a_n)) = (\rho_{V_1}(a_1), \ldots, \rho_{V_n}(a_n))$.

Lemma 3.8. *Zij V een representatie van een algebra A, met A zoals hierboven. Er geldt: V is irreducibel dan en slechts dan als $1_i V$ irreducibel is voor precies één $i \in \{1, \ldots, n\}$ en $1_j V = 0$ voor $j \neq i$.*

Bewijs. $\Leftarrow$ Zij $1_i V$ irreducibel voor een $i \in \{1, \ldots, n\}$ en $1_j V = 0$ voor $j \neq i$. Dan geldt $V = 1_1 V \oplus \ldots \oplus 1_n V = 0 \oplus \ldots \oplus 1_i V \oplus \ldots \oplus 0$. De deelrepresentaties van V komen dus overeen met de deelrepresentaties van $1_i V$. Omdat $1_i V$ irreducibel is, zijn 0 en $1_i V$ de enige deelrepresentaties. De deelrepresentaties van V zijn dan $0 \oplus \ldots \oplus 0$ en $0 \oplus \ldots \oplus 1_i V \oplus \ldots \oplus 0 = V$. Dus V is irreducibel.

$\Rightarrow$ Zij V irreducibel. Stel dat $1_i V$ reducibel is voor een $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dan is er een deelrepresentatie U van $1_i V$ ongelijk aan 0 en ongelijk aan $1_i V$. Dan geldt dat $U \subset V$ een deelrepresentatie van V is ongelijk aan 0 en ongelijk aan V. Omdat V irreducibel is kan dit niet en daarom is $1_i V$ voor geen enkele $i \in \{0, \ldots, n\}$ reducibel.
Stel dat $1_i V$ en $1_j V$ voor $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $j \neq i$ irreducibel zijn. Dan geldt dat $1_i V \subset V$ een niet-triviale deelrepresentatie is, want $1_i V$ is ongelijk aan 0 en ongelijk aan V. Omdat V irreducibel is kan dit niet. We concluderen dat $1_i V$ voor precies één $i \in \{1, \ldots, n\}$ irreducibel is en $1_j V = 0$ voor alle $j \neq i$. □

Stelling 3.9. *Zij $A = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ voor een lichaam k. Dan zijn $V_1 = k^{d_1}, \ldots, V_r = k^{d_r}$ de irreducibele representaties van A en elke eindig dimensionale representatie van A is een directe sommen van kopieën van $V_1, \ldots, V_r$.*

Bewijs. We zullen eerst bewijzen dat k^d de enige irreducibele representatie is van $\mathbb{M}_d(k)$.

Dat k^d een representatie is zien we in voorbeeld 2.17. Zij $W \neq 0$ een deelrepresentatie van k^d en zij $w \in W$ en $v \in k^d$ willekeurig. Dan is er een $a \in \mathbb{M}_d(k)$ zodat $aw = v$. Dus $v \in W$ en dus $W = k^d$. Dus is k^d irreducibel.

We definiëren voor elke $(i, j) \in \{1, \ldots d\}^2$ de matrix $E_{ij} \in \mathbb{M}_d(k)$ als de matrix die een 1 heeft in de i-de rij van de j-de kolom en verder overal een 0.
Zij V een eindig dimensionale representatie van $\mathbb{M}_d(k)$.
We zullen eerst een aantal beweringen bewijzen.

Bewering 1. Er geldt: $V = E_{11} V \oplus \ldots \oplus E_{dd} V$.
Bewijs bewering 1: Zij $v \in V$, dan kan v geschreven worden als

$$v = \mathbb{I} v = (E_{11} + \ldots + E_{dd}) v = E_{11} v + \ldots + E_{dd} v,$$

waarbij $\mathbb{I}$ de $(d \times d)$-dimensionale eenheidsmatrix is. We bewijzen dat deze schrijfwijze uniek is. Stel $v = u_1 + \ldots + u_d$ met $u_i \in E_{ii} V$ en noteer $u_i = E_{ii} u_i'$. Als we aantonen dat $u_i = E_{ii} v$ dan zijn we klaar:

$$\begin{aligned} E_{ii} v &= E_{ii}(u_1 + \ldots + u_d) \\ &= E_{ii}(E_{11} u_1' + \ldots + E_{dd} u_d') \\ &= E_{ii} E_{11} u_1' + \ldots + E_{ii} E_{dd} u_d' \\ &= E_{ii} u_i' \\ &= u_i. \end{aligned}$$

Bewering 2. De afbeelding $\Phi_i : E_{11} V \to E_{ii} V$, $v \mapsto E_{i1} v$ is een isomorfisme voor elke $i \in \{1, \ldots, d\}$.
Bewijs bewering 2: De afbeelding Φ_i is goed gedefinieerd, want voor $v \in E_{11} V$ geldt $v = E_{11} v'$. Dus $E_{i1} v = E_{i1} E_{11} v' = E_{i1} v' = E_{ii} E_{i1} v' \in E_{ii} V$, omdat $E_{i1} v' \in V$.
De afbeelding Φ_i is lineair:

$\Phi_i(v+w) = E_{i1}(v+w) = E_{i1}v + E_{i1}w = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$
$\Phi_i(\lambda v) = E_{i1}(\lambda v) = \lambda E_{i1}v = \lambda \Phi_i(v)$
voor alle $v, w \in E_{11}V$, voor alle $\lambda \in k$.

We definiëren nu $\Phi_i^{-1} : E_{ii}V \to E_{11}V,\ v \mapsto E_{1i}v$. De afbeelding Φ^{-1} is goed gedefinieerd, want voor $v \in E_{ii}V$ geldt $v = E_{ii}v'$. Dus $E_{1i}v = E_{1i}E_{ii}v' = E_{1i}v' = E_{11}E_{1i}v' \in E_{11}V$, omdat $E_{1i}v' \in V$. Verder kunnen we op dezelfde manier als bij Φ_i zien dat Φ_i^{-1} lineair is. We laten nog zien dat Φ_i en Φ_i^{-1} elkaars inverse zijn:

- $\Phi_i \circ \Phi_i^{-1}(v) = \Phi_i(E_{1i}v) = E_{i1}E_{1i}v = E_{ii}v$. En $v \in E_{ii}V$, dus $v = E_{ii}v'$ voor een $v' \in V$. Dus $E_{ii}v = E_{ii}E_{ii}v' = E_{ii}v' = v$.

- $\Phi_i^{-1} \circ \Phi_i(v) = \Phi_i^{-1}(E_{i1}v) = E_{1i}E_{i1}v = E_{11}v$. En $v \in E_{11}V$, dus $v = E_{11}v'$ voor een $v' \in V$. Dus $E_{11}v = E_{11}E_{11}v' = E_{11}v' = v$.

En dus is Φ_i een isomorfisme.

Definieer voor elke $v \in E_{11}V$, $S(v) := \langle E_{11}v, E_{21}v, \ldots, E_{d1}v \rangle$
Bewering 3. De ruimte $S(v)$ is een deelrepresentatie van V en is isomorf aan k^d.
Bewijs bewering 3: Er geldt duidelijk dat $S(v) \subset V$. Daarnaast hebben we dat:

$$aE_{i1}v = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \ldots & a_{dd} \end{pmatrix} E_{i1}v = \begin{pmatrix} a_{1i} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{di} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} v = a_{1i}E_{11}v + \ldots + a_{di}E_{d1}v \in S(v)$$

voor alle $a \in \mathbb{M}_d(k)$, voor alle $i \in \{1, \ldots, d\}$ en voor alle $v \in E_{11}V$. Het is genoeg om alleen naar de voortbrengers te kijken, dus $S(v)$ is een deelrepresentatie.
Definieer vervolgens de afbeelding:

$$\psi : S(v) \to k^d \qquad E_{i1}v \mapsto (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0)^T$$

voor alle $i \in \{1, \ldots, d\}$. Vervolgens breiden we ψ lineair uit. We laten zien dat ψ een intertwiner is:

$$\begin{aligned} \psi(aE_{i1}v) &= \psi(a_{1i}E_{11}v + \ldots + a_{di}E_{d1}v) \\ &= a_{1i}\psi(E_{1i}v) + \ldots + a_{di}\psi(E_{d1}v) \\ &= (a_{1i}, \ldots, a_{di})^T \\ &= a \cdot (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0)^T \\ &= a\psi(E_{i1}v). \end{aligned}$$

Verder is ψ surjectief, want zij $(a_1, \ldots, a_d)^T \in k^d$. Dan geldt voor $a_1E_{11}v + \ldots + a_dE_{d1}v \in S(v)$ dat $\psi(a_1E_{11}v + \ldots + a_dE_{d1}v) = (a_1, \ldots, a_d)^T$. De dimensies van k^d en $S(v)$ zijn gelijk, dus de afbeelding ψ is ook injectief. Dus ψ is een isomorfisme.

Er geldt voor $v \in E_{11}V$, dat $v = E_{11}v' = E_{11}E_{11}v' = E_{11}v \in S(v)$ met $v' \in V$.

Bewering 4. Voor de representatie V geldt: $V = S(v_1) \oplus \ldots \oplus S(v_k)$, waar $\{v_1, \ldots, v_k\}$ een basis is van $E_{11}V$.
Bewijs bewering 4. Zij $\{v_1, \ldots, v_k\}$ een basis voor $E_{11}V$. Het is voldoende om te laten zien dat elke basisvector van V uniek te schrijven is als som van elementen uit $S(v_i)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. De verzameling $\{E_{i1}v_1, \ldots, E_{i1}v_k\}$ vormt een basis voor $E_{ii}V$ vanwege het isomorfisme Φ_i (bewering 2). Omdat $V = E_{11}V \oplus \ldots \oplus E_{dd}V$ (bewering 1) hebben we dat $\{E_{i1}v_j \mid j \in \{1, \ldots, k\}, i \in \{1, \ldots, d\}\}$ een basis is voor V. We willen dus laten zien dat $E_{i1}v_j$ uniek geschreven kan worden

als som van de elementen uit $S(v_i)$ voor elke $j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \in \{1, \ldots, d\}$. Er geldt $v_j \in S(v_j)$ en $E_{i1}v_j \in S(v_j)$, want $S(v_j)$ is deelrepresentatie van V (bewering 3). Dus:

$$E_{i1}v_j = 0 + \ldots + \underbrace{E_{i1}v_j}_{j} + 0 + \ldots + 0.$$

Stel nu $E_{i1}v_j = u_1 + \ldots + u_k$ met $u_i \in S(v_i)$ voor alle $i \in \{1, \ldots k\}$. Dan is elke u_i weer uit te schrijven volgens de definitie van $S(v)$:

$$E_{i1}v_j = a_{11}E_{11}v_1 + \ldots a_{1d}E_{d1}v_1 + \ldots\ldots + a_{k1}E_{11}v_k + \ldots + a_{kd}E_{d1}v_k,$$

met $a_{ji} \in k$. Dan is

$$E_{i1}v_j = E_{ii}E_{i1}v_j = a_{1i}E_{i1}v_1 + \ldots + a_{ki}E_{i1}v_k.$$

Omdat de vectoren $E_{i1}v_1, \ldots, E_{i1}v_k$ lineair onafhankelijk zijn volgt nu:

$$a_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{als } j = i \\ 0 & \text{anders} \end{cases}.$$

We concluderen dat als V irreducibel is dat dan $V \cong S(v_i)$, voor een $i \in \{1, \ldots, k\}$ (vanwege het vorige lemma). Vervolgens weten we dat $S(v_i) \cong k^d$. Dus $V \cong k^d$. Dus de enige irreducibele representatie van $\mathbb{M}_d(k)$ is k^d. En voor V een willekeurige representatie geldt $V \cong S(v_1) \oplus \ldots \oplus S(v_k) \cong k^d \oplus \ldots \oplus k^d$.

Zij nu W een willekeurige representatie van $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{M}_{d_i}(k)$, dan is W isomorf met een som van representaties van $\mathbb{M}_{d_i}(k)$ (opmerking 3.7). Met het voorgaande weten we hoe die eruit zien. Dus W is een directe som van kopiën van de irreducibele representaties $k^{d_1}, \ldots, k^{d_r}$. Als W irreducibel is dan volgt met behulp van vorig lemma dat $W \cong k^{d_i}$ voor een $i \in \{1, \ldots, r\}$. $\square$

Voorbeeld 3.10. Elke representatie van $\mathbb{M}_3(k)$ is van de vorm

$$nk^3 := \underbrace{k^3 \oplus \ldots \oplus k^3}_{n}$$

met n een positief geheel getal. De afbeelding $\rho : \mathbb{M}_3(k) \to \mathrm{End}(nk^3)$ ligt nu vast door $\rho(a)|_{k^3}$, waar $\rho(a)v = av$ voor $a \in \mathbb{M}_3(k)$.

Elke representatie van $\mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_2(k)$ is van de vorm nk^2 met n een positief geheel getal. Elke representatie van $\mathbb{M}_3(k) \oplus \mathbb{M}_2(k)$ is van de vorm $n_1k^3 \oplus n_2k^2$ met n_1 en n_2 positieve gehele getallen.

Gevolg 3.11. *Voor een eindig dimensionale algebra A over een algebraïsch afgesloten lichaam k geldt: A is halfenkelvoudig dan en slechts dan als $A \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{M}_{d_i}(k)$ voor een r en $d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N}$.*

Bewijs. $\Rightarrow$ Als $\mathrm{Rad}(A) = 0$ dan volgt uit Stelling 3.6 en propositie 2.13 dat $A \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{M}_{d_i}(k)$.

$\Leftarrow$ Met Stelling 3.9 zien we dat elke irreducibele representatie van A isomorf is met k^{d_i} voor een $i \in \{1, \ldots, r\}$. Stel $a \neq 0$ en $a \in \mathrm{Rad}(A)$ dan $\rho(a)v = 0$ voor alle $v \in k^{d_i}$, voor elke $i \in \{1, \ldots, r\}$. Kies een i willekeurig, dan geldt $\rho|_{\mathbb{M}_{d_i}(k)}(a)v = 0$, voor alle $v \in k^{d_i}$. Maar er is een $v \in k^{d_i}$ zodat $a|_{\mathbb{M}_{d_i}(k)}v \neq 0$. We concluderen dat $a \notin \mathrm{Rad}(A)$. Dus $\mathrm{Rad}(A) = 0$, dus A is halfenkelvoudig. $\square$

Opmerking 3.12. De implicatie van rechts naar links is ook waar voor een willekeurig lichaam k. We gebruiken in het bewijs voor deze implicatie namelijk Stelling 3.9. En deze geldt voor een algebra A over een willekeurig lichaam k.

3.2 Homomorfismen tussen halfenkelvoudige algebra's

We gaan in het vervolg kijken naar halfenkelvoudige algebra's over een algebraïsch afgesloten lichaam k. We weten uit de vorige paragraaf dat deze algebra's isomorf zijn met een matrixalgebra. We zullen dan ook voortaan spreken over matrixalgebra's.
Het doel van deze paragraaf is te bestuderen hoe een homomorfisme tussen twee matrixalgebra's A en B er uit ziet. Het blijkt dat we deze homomorfismen precies kunnen beschrijven.

Propositie 3.13. *Zij $\phi : A \to B$ een homomorfisme tussen matrixalgebra's A en B, waarbij $A = \mathbb{M}_N(k)$ en $B = \mathbb{M}_M(k)$. Dan geldt dat N een deler is van M en ϕ van de volgende vorm is:*

$$\phi(a) = \underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{\frac{M}{N}},$$

voor alle $a \in A$ op een basistransformatie na.

Bewijs. Omdat $\mathbb{M}_M(k) \cong \mathrm{End}(k^M)$ (propositie 2.13), komt ϕ overeen met het homomorfisme tussen de algebra's A en $\mathrm{End}(k^M)$. We concluderen hieruit dat k^M een representatie is van A en dus volgens Stelling 3.9 een directe som is van k^N. Dus

$$k^M \cong \underbrace{k^N \oplus \ldots \oplus k^N}_{c}.$$

Daarmee is M een veelvoud van N en $c = \frac{M}{N}$. Merk op dat als dit niet het geval is het gegeven homomorfisme dus niet kan bestaan. De afbeelding ϕ ligt dus vast door $\phi|_{k^N}$. Deze representatie werkt op k^N als $\alpha|_{k^N}(a)(v) = av$ voor alle $a \in A$, voor alle $v \in k^n$. Deze representatie komt dan precies overeen (op een basistransformatie na) met de afbeelding van $A \to \mathbb{M}_N(k)$, $a \mapsto a$. En dus is onze ϕ precies van de beweerde vorm. □

Voorbeeld 3.14. Zij $A = \mathbb{M}_2(k)$ en $B = \mathbb{M}_4(k)$. Elk homomorfisme ϕ tussen A en B wordt op een basistransformatie na weergegeven door:

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Zij $A = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ en $B = \mathbb{M}_3(k)$. Dan kan er geen homomorfisme tussen beide algebra's bestaan, want 3 is geen veelvoud van 2.

Stelling 3.15. *Zij A en B twee matrixalgebra's. We noteren $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $B = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{M}_{c_j}(k)$. Zij $\phi : A \to B$ een homomorfisme. Dan geldt $c_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ji} d_i$ voor alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ en N_{ji} is een geheel getal ≥ 0 dat van i en j afhangt. De afbeelding ϕ is dan van de volgende vorm:*

$$\phi(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n) = \underbrace{a_1 \oplus \ldots \oplus a_1}_{N_{11}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{a_n \oplus \ldots \oplus a_n}_{N_{1n}} \bigoplus \ldots \bigoplus \underbrace{a_1 \oplus \ldots \oplus a_1}_{N_{m1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{a_n \oplus \ldots \oplus a_n}_{N_{mn}}$$

met $a_i \in \mathbb{M}_{d_i}(k)$, korter genoteerd als:

$$\phi(\oplus_{i=1}^{n} a_i) = \bigoplus_{j=1}^{m} (\bigoplus_{i=1}^{n} N_{ji} a_i).$$

Bewijs. Het homomorfisme ϕ valt uiteen in m directe sommen: $\phi_j : A \to \mathbb{M}_{c_j}(k)$. Omdat $\mathbb{M}_{c_j}(k) \cong \mathrm{End}(k^{c_j})$ voor alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ (propositie2.13), komt ϕ_j overeen met het homomorfisme tussen de algebra's A en $\mathrm{End}(k^{c_j})$. Dus k^{c_j} is een representatie van A en is dus

volgens Stelling 3.9 isomorf met $N_{j1}k^{d_1} \oplus \ldots \oplus N_{jn}k^{d_n}$ voor zekere N_{ji} geheel en ≥ 0. Dus $c_j = \sum_{i=1}^n N_{ji}d_i$ voor alle $j \in \{1, \ldots, m\}$. Merk hier weer op dat als dit niet het geval is zulk homomorfisme niet kan bestaan.
De afbeelding ϕ_j ligt dus vast door $\phi_j|_{k^{d_1}}, \ldots, \phi_j|_{k^{d_n}}$ gezien als representatie. Deze representatie werkt als volgt: $\phi_j|_{k^{d_i}}(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n)(v) = a_i v$ voor alle $(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n) \in A$, voor alle $v \in k^{d_i}$ en voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. En deze afbeelding komt dus precies (op een basisverandering na) overeen met de afbeelding van $A \to \mathbb{M}_{d_i}(k)$ met $(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n) \mapsto a_i$. En daarmee ziet ϕ_j er dus uit als

$$\phi_j(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n) = \underbrace{a_1 \oplus \ldots \oplus a_1}_{N_{j1}} \oplus \ldots \oplus \underbrace{a_n \oplus \ldots \oplus a_n}_{N_{jn}}$$

en is ϕ van de beweerde vorm. $\square$

Opmerking 3.16. We zeggen dat $\mathbb{M}_{d_i}$ gedeeltelijk is ingebed in $\mathbb{M}_{c_j}$ met multipliciteit N_{ji}.

Opmerking 3.17. Het is zo dat de N_{ji}'s niet uniek hoeven te zijn. Bij twee homomorfismen van A naar B kan dus een andere combinatie van de N_{ji}'s horen. Elke mogelijkheid voor de N_{ji}'s zodat aan de eis uit Stelling 3.9 voldaan wordt, geeft een ander wezenlijk verschillend homomorfisme. Merk op dat er maar een eindig aantal mogelijkheden is. Wanneer we per gevonden homomorfisme alle mogelijke basistransformaties zullen uitvoeren, hebben we ze allemaal gevonden. We komen hier later op terug.

Voorbeeld 3.18. Zij $A = k$ en $B = k \oplus \mathbb{M}_2(k)$, dan worden alle homomorfismen tussen A en B op een basistransformatie na gegeven door

$$\phi : A \to B \qquad a \mapsto a \oplus a \oplus a.$$

voor alle $a \in k$.
Zij $A = k \oplus \mathbb{M}_2(k)$ en $B = \mathbb{M}_3(k)$, dan zijn op een basisverandering na de volgende twee homomorfismen tussen A en B mogelijk:

$$\begin{aligned} \phi_1 : A \to B, &\qquad a \oplus b \mapsto a \oplus a \oplus a \\ \phi_2 : A \to B, &\qquad a \oplus b \mapsto a \oplus b \end{aligned}$$

voor alle $a \in k$ en $b \in \mathbb{M}_2(k)$.

3.3 Bratteli diagrammen

Het feit dat de homomorfismen tussen matrixalgebra's van zulk gestructureerde vorm zijn, geeft aanleiding tot het schematisch weergeven ervan. We zullen een diagram introduceren waarin we de homomorfismen kunnen weergeven.

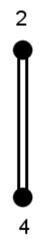
Definitie 3.19. Zij A en B twee eindig dimensionale matrixalgebra's, $A = \oplus_{i=1}^n \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $B = \oplus_{j=1}^m \mathbb{M}_{c_j}(k)$. En zij $\phi : A \to B$ een homomorfisme. Dan kunnen we bij dit homomorfisme een diagram maken. Dit doen we als volgt: we tekenen twee horizontale rijen met vertices. De bovenste rij bevat n knopen, één voor elk blok van A. De knopen zijn gelabeld met de dimensies van de blokken: d_1 tot en met d_n. Op dezelfde manier bevat de onderste rij m knopen, gelabeld met c_1 tot en met c_m. Vervolgens trekken we N_{ji} lijnen tussen d_i en c_j voor elke $j \in \{1, \ldots, m\}$ en voor elke $i \in \{1, \ldots, n\}$, waar $c_j = \sum_{i=1}^n N_{ji}d_i$. Het diagram dat zo ontstaat noemen we een *Bratteli diagram.*

Opmerking 3.20. Voor elke mogelijkheid van de N_{ji}'s krijgen we een ander Bratteli diagram. Het aantal verschillende diagrammen is eindig en komt dus overeen met het aantal wezenlijk verschillende homomorfismen.

Opmerking 3.21. Voor twee matrixalgebra's A en B en een gegeven Bratteli diagram $\mathbb{B}$ bij A en B, kunnen we hierbij een homomorfisme $\phi_{\mathbb{B}} : A \to B$ construeren. Dit doen we door door elk blok $\mathbb{M}_{d_i}(k)$ van A, precies zo vaak in te bedden in $\mathbb{M}_{c_j}$ als er lijnen zijn van d_i naar c_j. Dit geeft inderdaad een homomorfisme, omdat in elk Bratteli diagram per constructie geldt dat $c_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ji} d_i$, waar N_{ji} staat voor het aantal lijnen tussen d_i en c_j.

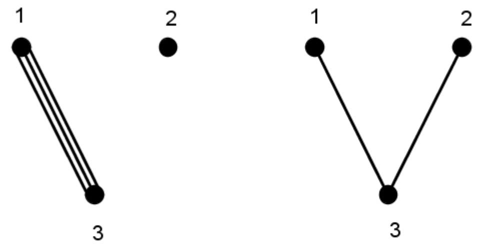
We geven nu een aantal voorbeelden van Bratteli diagrammen.

Voorbeeld 3.22. Het Bratteli diagram voor een homomorfisme $\mathbb{M}_2(k) \to \mathbb{M}_4(k)$:

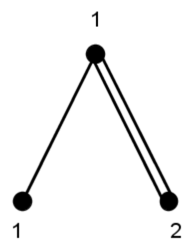


Het Bratteli diagram voor een homomorfisme $\mathbb{M}_N(k) \to \mathbb{M}_N(k)$:

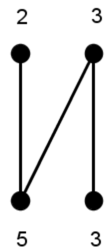
De twee Bratteli diagrammen voor de homomorfismen $k \oplus \mathbb{M}_2(k) \to \mathbb{M}_3(k)$:



Het Bratteli diagram voor een homomorfisme $k \to k \oplus \mathbb{M}_2(k)$:



Het Bratteli diagram voor een homomorfisme $\mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_3(k) \to \mathbb{M}_5(k) \oplus \mathbb{M}_3(k)$:



Opmerking 3.23. Uit Stelling 3.15 volgt dat elke vertex op de onderste rij bereikt moet worden door een lijn. Omdat er best een N_{ji} gelijk kan zijn aan 0 is het wel mogelijk dat niet elke vertices in de bovenste rij bereikt wordt door een lijn.

4 Relaties tussen de homomorfismen

We hebben in het vorige hoofdstuk beschreven hoe alle wezenlijke verschillende homomorfismen tussen twee matrixalgebra's er uit zien. We gaan ze in dit hoofdstuk allemaal beschrijven. We zullen dus gaan kijken naar welke homomorfismen we krijgen door basistransformaties met een bekend homomorfisme. Allereerst hebben we daarvoor wat inleidende definities uit de groepentheorie voor nodig.

4.1 Inleidende definities uit de groepentheorie

Definitie 4.1. Een *groep* G is een niet lege verzameling met een associatieve binaire bewerking: $G \times G \to G$ met een volgens deze bewerking neutraal element en een inverse element g^{-1} voor elke $g \in G$.

Voorbeeld 4.2. Een voorbeeld van een groep is $GL(n)$, de verzameling van inverteerbare $(n \times n)-$dimensionale matrices, met de gewone matrixvermenigvuldiging.

Definitie 4.3. Zij $G_1, \ldots, G_n$ groepen. Dan is $\prod_{i=1}^{n} G_i$ het *directe product* van $G_1, \ldots, G_n$. Een groep waarbij $g \in \prod_{i=1}^{n} G_i$ van de vorm $(g_1, \ldots, g_n)$ is met g_i in G_i. De vermenigvuldiging is dan de componentsgewijze vermenigvuldiging.

Definitie 4.4. Een *ondergroep* $H < G$ is een verzameling H die bevat is in een groep G, zodat H het eenheidselement bevat, de inverse van elk element in H weer in H zit en H gesloten is onder zijn groepsbewerking.

Definitie 4.5. Een *linkswerking* (in het vervolg *werking*) van een groep G op een verzameling X is een afbeeling: $\lambda : G \times X \to X$ met de eigenschappen dat:

(i) $\lambda(e, x) = x$ voor alle $x \in X$
(ii) $\lambda(gh, x) = \lambda(g, \lambda(h, x))$ voor alle $g, h \in G$, voor alle $x \in X$

Op dezelfde manier hebben we ook een *rechtswerking.*

Definitie 4.6. Zij $\lambda : G \times X \to X$ een werking van een groep G op een verzameling X. Zij $x \in X$, dan is de *stabilisator* van x in G de verzameling $G_x := \{g \in G | \lambda(g, x) = x\}$. In het bijzonder geldt altijd $e \in G_x$.

Definitie 4.7. Zij $\lambda : G \times X \to X$ een werking van een groep G op een verzameling X. De *baan* Gx van een element $x \in X$ is de verzameling $\{\lambda(g, x) | g \in G\}$.

Voor een groep G, een verzameling X en een werking $\lambda : G \times X \to X$ daarop zullen we in het vervolg gx schrijven in plaats van $\lambda(g, x)$.

Definitie 4.8. Zij G een groep en $H < G$ een ondergroep. De baan $Hg = \{hg | h \in H\}$ voor een werking van links vermenigvuldigen van H op G noemen we de rechternevenklasse van g. We noteren $H \setminus G$ voor de collectie van rechternevenklassen van G. Op dezelfde manier noteren we G/H voor de linkernevenklassen.

Definitie 4.9. Een (H, K) *dubbele nevenklasse* in een groep G met H en K ondergroepen van G, is van de vorm HxK met $x \in G$. We kunnen ze opvatten als de groepswerking van $H \times K$ op G, waarbij H werkt door linksvermenigvuldingen en K werkt door rechtsvermenigvulding met de inverse. We noteren de verzameling van deze nevenklassen als:

$$H \setminus G/K.$$

Stelling 4.10. *Zij G een groep en X een verzameling en $x \in X$. Dan is er een bijectie tussen Gx en G/G_x.*

Bewijs. Definieer $\phi : G/G_x \to Gx$, $\phi(gG_x) = gx$. We bewijzen eerst dat ϕ welgedefinieerd is. Stel dat $gG_x = hG_x$ voor $g, h \in G$. Dan $g \in hG_x$, dus er is een $a \in G_x$ met $g = ha$. Dan geldt $gx = (ha)x = h(ax) = hx$, aangezien $a \in G_x$.
Nu gaan we bewijzen dat ϕ injectief is. Stel $gx = hx$ voor $g, h \in G$, dan $h^{-1}gx = x$ en dus $h^{-1}g \in G_x$. We willen bewijzen dat $gG_x = hG_x$. Er geldt:

- $\subseteq$ Zij $p \in G_x$, dan $gp = (hh^{-1})gp = h(h^{-1}gp) \in hG_x$. Dus $gG_x \subseteq hG_x$.
- $\supseteq$ Zij $p \in G_x$, dan $hp = (gg^{-1})hp = g((h^{-1}g)^{-1}p) \in gG_x$. Dus $hG_x \subseteq gG_x$.

Het is verder ook duidelijk dat elk element een origineel heeft en daarmee is ϕ een bijectie. □

Definitie 4.11. Een *normale ondergroep* N van G is een ondergroep die bovendien voldoet aan $gng^{-1} \in N$ voor alle $n \in N$. We noemen N een *normaaldeler* en noteren $N \lhd G$.

Propositie 4.12. *Zij $N \lhd G$. De bewerking M in G/N is als volgt gedefinieerd: $(g_1N, g_2N) \mapsto g_1g_2N$. We noemen G/N de factorgroep van G naar N. Er geldt dat G/N met deze bewerking inderdaad een groep vormt.*

Bewijs. Voor $g \in G$ en $n \in N$ geldt:

$$(gng^{-1})N = M(gnN, g^{-1}N) = M(gN, g^{-1}N) = (gg^{-1})N = eN.$$

Dus $gng^{-1} \in N$. Dus N moet inderdaad normaal zijn willen we de gegeven bewerking hebben. We laten zien dat de afbeelding goed gedefinieerd is. Zij $g_1N = g_2N$ en $h_1N = h_2N$ en laat $m, n \in N$ zodat $g_2 = g_1m$ en $h_2 = h_1n$. Verder is $k = h_1^{-1}nh_1 \in N$, omdat N normaal is. Er geldt dat $(g_2h_2)N = (g_1h_1)N$, want $g_2h_2 = g_1mh_2n = (g_1h_1)kn$, waar $kn \in N$.
Daarnaast is het duidelijk dat eN het neutrale element vormt en de inverse van een element $gN \in G/N$ gelijk is aan $g^{-1}N$. □

Definitie 4.13. Zij G een groep. Het centrum van G is de verzameling $Z(G) := \{g \in G | gh = hg \text{ voor alle } h \in G\}$.

Notatie 4.14. We noteren voor een groep G: $PG := G/Z(G)$.

Propositie 4.15. *De groep PG is goed gedefinieerd.*

Bewijs. We laten zien dat $Z(G)$ een normaaldeler is. $Z(G)$ vormt een ondergroep en voor $g \in G$ en $h \in Z(G)$ geldt $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in Z(G)$. □

Definitie 4.16. Zij G een groep. We zeggen dat G een *semidirect product* is van ondergroepen N en H als N een normaaldeler is en elke $g \in G$ op een unieke te schrijven is als product van een element uit N en uit H. We noteren: $G = N \rtimes H$.

Definitie 4.17. Zij G, H en K groepen en zij ψ_1 een werking van rechts van K op G en ψ_2 een werking van links van K op H. Het *fibered product* van G en H over K is de verzameling $G \times_K H := \frac{G \times H}{K}$, waar de klassen bepaald worden door de relatie: $(g, h) \sim (\psi_{1_k}(g), \psi_{2_k}(h)$, waar $k \in K, g \in G$ en $h \in H$.

4.2 Specificatie van de basistransformaties

We gaan nu kijken welke homomorfismen we kunnen krijgen door basistransformatie van een homomorfisme dat correspondeert met een Bratteli diagram. In de volgende propositie zullen we zien welke basistransformaties relevant zijn om te bekijken.

Propositie 4.18. *Voor $A = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $B = \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{M}_{c_j}(k)$ twee matrixalgebra's met een gegeven Bratteli diagram $\mathbb{B}$ hebben we de afbeelding $\phi_{\mathbb{B}}(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n) = \bigoplus_{j=1}^m (\bigoplus_{i=1}^n N_{ji} a_i)$ (zoals in paragraaf 2.3). Door een basistransformatie van de afbeelding kunnen we vervolgens de rest van de homomorfismen bepalen: $\phi(\cdot) = g\phi_{\mathbb{B}}(\cdot)g^{-1}$ waar $g \in \prod_{j=1}^m GL(c_j)$.*

Bewijs. We moeten bewijzen dat we inderdaad $g \in \prod_{j=1}^m GL(c_j)$ kunnen nemen en niet $g \in GL(\dim B)$. De basistransformatie is dus te beperken tot een basistransformatie binnen de m blokken van B. Stel dat we een transformatie hebben die niet werkt binnen de blokken van B dan zijn er twee mogelijkheden:

1. Transformeren geeft een element dat niet meer in B zit.
2. Stel dat de transformatie werkt tussen twee blokken van B. We kunnen vervolgens elk blok weer diagonaliseren (de basistransformatie hiervoor werkt op elk blok apart). We hebben dan dat de N_{ji}'s veranderd zijn en dat betekent dat we een ander Bratteli diagram zouden hebben gehad.

Het is duidelijk dat deze mogelijkheden niet aan onze eisen voldoen en omdat de enige andere mogelijkheid een basistransformatie is op elk blok apart, kunnen we $g \in \prod_{j=1}^m GL(c_j)$ bekijken. $\square$

Notatie 4.19. Zij $A = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{M}_{d_i}(k)$ een matrixalgebra. We noteren $GL(A) := \prod_{i=1}^n GL(d_i)$.

Propositie 4.20. *Zij A en B twee matrixalgebra's en laat $X := \{\phi : A \to B | \phi \text{ homomorfisme}\}$. Definieer de afbeelding*

$$\lambda : GL(B) \times X \to X, \qquad (g, \phi) \mapsto \alpha_g(\phi)$$

voor alle $\phi \in X$, met $\alpha_g(\phi)(a) = g\phi(a)g^{-1}$ voor alle $a \in A$. Dan is λ een werking van $GL(B)$ op X.

Bewijs. We gaan de twee eisen na van een groepswerking:

$$\begin{aligned}
\lambda(e, \phi) &= \alpha_e(\phi) = \phi, \text{ want } \alpha_e(\phi)(a) = e\phi(a)e^{-1} = \phi(a) \\
\lambda(hg, \phi) &= \alpha_{hg}(\phi) = \alpha_h(\alpha_g(\phi)) = \lambda(h, \lambda(g, \phi)), \\
&\quad \text{want } \alpha_{hg}(\phi)(a) = hg\phi(a)(hg)^{-1} = hg\phi(a)g^{-1}h^{-1} = \alpha_h(g\phi(a)g^{-1}) = \alpha_h(\alpha_g(\phi))(a) \\
&\quad \text{voor alle } g, h \in G, \text{ voor alle } \phi \in X \text{ en } a \in A.
\end{aligned}$$

Dus λ is een werking van $GL(B)$ op $\phi(A)$. $\square$

Propositie 4.21. *Zij $\mathbb{B}$ een Bratteli diagram bij twee matrixalgebra's A en $B =$. Zij $\phi_{\mathbb{B}}$ het bijbehorende homomorfisme zoals in paragraaf 2.3. beschreven. Definieer voor $g \in GL(B)$ de bijbehorende basistransformatie als $\phi_g(\cdot) = g\phi_{\mathbb{B}}(\cdot)g^{-1}$. Er geldt $\phi_g = \phi_{g'}$ voor $g, g' \in GL(B)$ dan en slechts dan als $gh = g'$ voor een $h \in GL(B)$ met $h\phi_{\mathbb{B}}(a) = \phi_{\mathbb{B}}(a)h$ voor alle $a \in A$.*

Bewijs. Voor het bewijs van rechts naar links hebben we voor alle $a \in A$ het volgende:

$$\phi_g(a) = g\phi_{\mathbb{B}}(a)g^{-1} = g'h^{-1}\phi_{\mathbb{B}}(a)hg'^{-1} = g'h^{-1}h\phi_{\mathbb{B}}(a)g'^{-1} = g'\phi_{\mathbb{B}}(a)g'^{-1} = \phi_{g'}(a).$$

Voor de andere kant definiëren we $h = g^{-1}g'$. Dan geldt inderdaad dat $gh = g'$ en voor alle $a \in A$:

$$\begin{aligned}
\phi_g(a) &= \phi_{g'}(a) \\
g\phi_{\mathbb{B}}(a)g^{-1} &= g'\phi_{\mathbb{B}}(a)g'^{-1} \\
\phi_{\mathbb{B}}(a)g^{-1} &= g^{-1}g'\phi_{\mathbb{B}}(a)g'^{-1} \\
\phi_{\mathbb{B}}(a)g^{-1}g' &= g^{-1}g'\phi_{\mathbb{B}}(a).
\end{aligned}$$

En dus geldt voor alle $a \in A$:

$$h\phi_{\mathbb{B}}(a) = g^{-1}g'\phi_{\mathbb{B}}(a) = \phi_{\mathbb{B}}(a)g^{-1}g' = \phi_{\mathbb{B}}(a)h.$$

$\square$

Bewijs. (alternatief) De inclusie van links naar rechts kunnen we ook inzien met behulp van de werking van G op X zoals in propositie 4.20. Bekijk $\phi_{\mathbb{B}} \in X$, er geldt dat $\phi_g(a) = \alpha_g(\phi_{\mathbb{B}})(a)$ voor alle $a \in A$ en $g \in G$. Omdat $\alpha_g(\phi_{\mathbb{B}}) = \alpha_{g'}(\phi_{\mathbb{B}})$ en $GL(B)\phi_{\mathbb{B}} \cong GL(B)/GL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}}$, hebben we dat $gGL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}} = g'GL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}}$. En

$$\begin{aligned} GL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}} &= \{h \in GL(B) | \alpha_h(\phi_{\mathbb{B}}) = \phi_{\mathbb{B}}\} \\ &= \{h \in GL(B) | h\phi_{\mathbb{B}}(a)h^{-1} = \phi_{\mathbb{B}}(a) \text{ voor alle } a \in A\} \\ &= \{h \in GL(B) | h\phi_{\mathbb{B}}(a) = \phi_{\mathbb{B}}(a)h \text{ voor alle } a \in A\}. \end{aligned}$$

Dit zijn precies de elementen die commuteren met $\phi_{\mathbb{B}}(a)$ voor alle $a \in A$. In het bijzonder zit e in $GL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}}$ en dus $g' \in gGL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}}$. Er is dus een $h \in GL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}}$ met $g' = gh$. $\square$

Opmerking 4.22. We zijn geïnteresseerd in de baan $G\phi_{\mathbb{B}}$ van $\phi_{\mathbb{B}} \in X$, waarbij X en G en de werking daarop zoals in propositie 4.20 zijn. De baan $G\phi_{\mathbb{B}}$ is namelijk de verzameling van alle homomorfismen die een basistransformatie van $\phi_{\mathbb{B}}$ zijn.

Definitie 4.23. Zij $A \subset B$ een deelalgebra van een algebra B. De *commutant* van $A \subset B$ is de verzameling $A' := \{b \in B | ba = ab \text{ voor alle } a \in A\}$.

Propositie 4.24. *Zij A en B twee matrixalgebra's met een homomorfisme $\phi : A \to B$. De ruimte van inverteerbare elementen van de commutant $\phi(A)'$ van $\phi(A) \subset B$ is gelijk aan $GL(B)_\phi$. Hierbij werkt G op de verzameling van homomorfismen zoals in propositie 4.20.*

Bewijs. Merk eerst op dat $\phi(A) \subset B$ inderdaad een deelalgebra is volgens propositie 2.15. Vervolgens is

$$\begin{aligned} &\{b \in B | b\phi(a) = \phi(a)b \text{ voor alle } a \in A, \text{ en } b \text{ inverteerbaar}\} \\ &= \{b \in GL(B) | b\phi(a) = \phi(a)b \text{ voor alle } a \in A\} \\ &= \{b \in GL(B) | b\phi(a)b^{-1} = \phi(a) \text{ voor alle } a \in A\} \\ &= \{b \in GL(B) | \alpha_b(\phi) = \phi\} \\ &= GL(B)_\phi. \end{aligned}$$

$\square$

Opmerking 4.25. Om de baan $GL(B)\phi_{\mathbb{B}} \cong GL(B)/GL(B)_{\phi_{\mathbb{B}}}$ te bepalen voor twee matrix-algebra's A en B met Bratteli diagram $\mathbb{B}$, moeten we dus eerst de commutant van $\phi_{\mathbb{B}}(A) \subset B$ bepalen.

Propositie 4.26. *Zij $A = \mathbb{M}_N(k)$ en $B = \mathbb{M}_M(k)$ twee matrixalgebra's met het Bratteli diagram $\mathbb{B}$. En zij $\phi_{\mathbb{B}}$ het bijbehorende homomorfisme van A naar B,*

$$\phi_{\mathbb{B}}(a) = \underbrace{a \oplus \ldots \oplus a}_{\frac{M}{N}}$$

voor alle $a \in A$. Dan geldt voor $b \in B$ dat b commuteert met $\phi_{\mathbb{B}}(a)$ voor alle $a \in A$ dan en slechts dan als

$$b = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbb{I} & \ldots & \lambda_{1\frac{M}{N}}\mathbb{I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{\frac{M}{N}1}\mathbb{I} & \ldots & \lambda_{\frac{M}{N}\frac{M}{N}}\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

met $\lambda_{ij} \in k$ en $\mathbb{I}$ de $(N \times N)$-dimensionale eenheidsmatrix.

Bewijs. Schrijf

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\frac{M}{N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\frac{M}{N}1} & \dots & b_{\frac{M}{N}\frac{M}{N}} \end{pmatrix} \text{ met } b_{ij} \in \mathbb{M}_N(k).$$

We bewijzen eerst de bewering: *De matrix b commuteert met $\phi_{\mathbb{B}}(a)$ voor alle $a \in A$ dan en slechts dan als b_{ij} commuteert met a.*
We schrijven simpelweg uit:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\frac{M}{N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\frac{M}{N}1} & \dots & b_{\frac{M}{N}\frac{M}{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a & \dots & b_{1\frac{M}{N}}a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\frac{M}{N}1}a & \dots & b_{\frac{M}{N}\frac{M}{N}}a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\frac{M}{N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\frac{M}{N}1} & \dots & b_{\frac{M}{N}\frac{M}{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab_{11} & \dots & ab_{1\frac{M}{N}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ab_{\frac{M}{N}1} & \dots & ab_{\frac{M}{N}\frac{M}{N}} \end{pmatrix}$$

We zien nu meteen dat de bewering geldt.

Het bewijs van rechts naar links van de propositie volgt uit de bewering aangezien $\lambda\mathbb{I}a = a\lambda\mathbb{I}$ voor alle $\lambda \in k, a \in A$.
Wat rest is nog het bewijs de andere kant op. We hebben dat elke $b_{ij} \in \mathbb{M}_N(k)$ correspondeert met een afbeelding $\psi_{b_{ij}} : k^N \to k^N$ met $\psi_{b_{ij}}(c) = b_{ij}c$ voor alle $c \in k^N$, waarbij we k^N zien als representatie van $\mathbb{M}_N(k)$ (zie propositie 2.13). In het bijzonder is k^N irreducibel en geldt: $a\psi_{b_{ij}}(c) = ab_{ij}c = b_{ij}ac = \psi_{b_{ij}}(ac)$ voor alle $a \in A$ en dus is $\psi_{b_{ij}}$ een intertwiner. Nu volgt met het lemma van Schur dat $\psi_{b_{ij}} = \lambda_{ij}\mathbb{I}$ voor een $\lambda_{ij} \in k$. Hiermee hebben we het gevraagde bewezen. □

Gevolg 4.27. *De commutant $\phi_{\mathbb{B}}(A)'$ van $\phi_{\mathbb{B}}(A) \subset B$, met A en B zoals in de vorige propositie, is isomorf met $\mathbb{M}_{\frac{M}{N}}(k)$. En $\mathbb{M}_{\frac{M}{N}}(k)$ is een deelalgebra van $M_M(k)$.*

Gevolg 4.28. *Zij A, B en $\phi_{\mathbb{B}}$ zoals in de vorige propositie. De baan $GL(M)\phi_{\mathbb{B}}$ van $\phi_{\mathbb{B}}$ onder de werking zoals gedefinieerd in propositie 4.20 is isomorf met*

$$GL(M)/GL(\frac{M}{N}).$$

Bewijs. Dit volgt met Propositie 4.24 en Gevolg 4.27. □

Voorbeeld 4.29. We bekijken $A = \mathbb{M}_2(k)$ en $B = \mathbb{M}_4(k)$ met bijbehorende Bratteli diagram $\mathbb{B}$ en homomorfisme $\phi_{\mathbb{B}} : A \to B$, $a \mapsto a \oplus a$. De commutant $\phi_{\mathbb{B}}(A)'$ van $\phi_{\mathbb{B}}(A) \subset B$ is de verzameling

$$\{\begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbb{I} & \lambda_{12}\mathbb{I} \\ \lambda_{21}\mathbb{I} & \lambda_{22}\mathbb{I} \end{pmatrix} |\lambda_{ij} \in k\},$$

waar $\mathbb{I}$ de (2×2)-dimensionale eenheidsmatrix is. Deze is isomorf met $\mathbb{M}_2(k)$. De baan $GL(4)\phi_{\mathbb{B}}$ van $\phi_{\mathbb{B}}$ is gelijk aan $GL(4)/GL(2)$. De mogelijke basistransformaties van $\phi_{\mathbb{B}}$ liggen hiermee vast. Omdat er maar één Bratteli diagram is voor A en B hebben we alle homomorfismen $\phi : A \to B$ beschreven.

We bekijken nu het algemene geval.

Stelling 4.30. *Zij $A = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $B = \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{M}_{c_j}(k)$ twee matrixalgebra's met een Bratteli diagram $\mathbb{B}$ en het daarbij behorende homomorfisme*

$$\phi_{\mathbb{B}} : A \to B, \ \ \phi_{\mathbb{B}}(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n) = \bigoplus_{j=1}^{m} (\bigoplus_{i=1}^{n} N_{ji} a_i).$$

Dan geldt voor een $b \in B$ dat b commuteert met $\phi_{\mathbb{B}}(a)$ voor alle $a \in A$ dan en slechts dan als

$$b = \bigoplus_{j=1}^{m} (\bigoplus_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{1N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{Nji1}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{N_{ji}N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \end{pmatrix})$$

met $\lambda_{ij} \in k$ en $\mathbb{I}_{d_i}$ de $(d_i \times d_i)$-dimensionale eenheidsmatrix.

Bewijs. Een $b \in B$ commuteert met $\phi_{\mathbb{B}}(a)$ voor alle $a \in A$ dan en slechts dan als voor elke $j \in \{1, \ldots, m\}$ de j-de component van b: b_j met $\phi_{\mathbb{B}_j}(a)$ commuteert voor alle $a \in A$. Hierbij is $\phi_{\mathbb{B}_j} : A \to \mathbb{M}_{c_j}(k)$ de j-de component van $\phi_{\mathbb{B}}$. Het is dus voldoende te bewijzen dat voor een $j \in \{1, \ldots, m\}$ en $b_j \in \mathbb{M}_{c_j}(k)$ het element b_j met $\phi_{\mathbb{B}_j}(a)$ voor alle $a \in A$ commuteert dan en slechts dan als

$$b_j = \bigoplus_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{1N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{Nji1}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{N_{ji}N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \end{pmatrix}$$

met $\lambda_{ij} \in k$ en $\mathbb{I}_{d_i}$ de $(d_i \times d_i)$-dimensionale eenheidsmatrix.

Kies een $j \in \{1, \ldots, m\}$.
Van rechts naar links moeten we kijken of elke component van

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{1N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{Nji1}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{N_{ji}N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \end{pmatrix}$$

commuteert met $N_{ji}a_i$ en dit komt overeen met het geval zoals in Propositie 4.26.
Voor de andere kant van het bewijs kiezen we $b_j \in \mathbb{M}_{c_j}(k)$ zodat b_j commuteert met $\phi_{\mathbb{B}_j}(a)$ voor alle $a \in A$. Dan komt b_j overeen volgens Propositie 2.13 met een afbeelding $\psi_{b_j} : k^{c_j} \to k^{c_j}$ waarbij we k^{c_j} zien als representatie van A. De representatie k^{c_j} valt dan volgens Stelling 3.9 uiteen in een directe som van kopiën van de irreducibele representaties van A en daarom geldt dat de afbeelding ψ_{b_j} overeenkomt met:

$$\psi_{b_j} : N_{j1}k^{d_1} \oplus \ldots \oplus N_{jn}k^{d_n} \to N_{j1}k^{d_1} \oplus \ldots \oplus N_{jn}k^{d_n}.$$

Omdat we eisen dat b_j commuteert met alle $\phi_{\mathbb{B}_j}(a)$ voor alle $a \in A$, volgt dat ψ_{b_j} een intertwiner is. De afbeelding ψ_{b_j} is gelijk aan de directe som van de n afbeeldingen

$$\psi_{b_{ji}} : N_{j1}k^{d_1} \oplus \ldots \oplus N_{jn}k^{d_n} \to N_{ji}k^{d_i}$$

met $i \in \{1, \ldots, n\}$. We bekijken nu de afbeelding $\psi_{b_{ji}}|_{N_{jk}k^{d_k}} : N_{jk}k^{d_k} \to N_{ji}k^{d_i}$ voor een i en $k \in \{1, \ldots, n\}$. Met het lemma van Schur volgt dat voor $i \neq k$ de afbeelding $\psi_{b_{ji}}|_{N_{jk}k^{d_k}}$ de nulafbeelding is. Oftewel $\psi_{b_{ji}} = \psi_{b_{ji}}|_{N_{ji}k^{d_i}}$, en dit komt precies overeen met het geval uit Propositie 4.26. De afbeelding $\psi_{b_{ji}} : N_{ji}k^{d_i} \to N_{ji}k^{d_i}$ komt namelijk overeen met een $(N_{ji}d_i \times N_{ji}d_i)$-dimensionale matrix die commuteert met $\underbrace{a_i \oplus \ldots \oplus a_i}_{N_{ji}}$, waarbij $a_i \in \mathbb{M}_{d_i}(k)$. Dus is

$$b_{ji} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{1N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{N_{ji}1}\mathbb{I}_{d_i} & \ldots & \lambda_{N_{ji}N_{ji}}\mathbb{I}_{d_i} \end{pmatrix}.$$

En daarmee is b_j van de beweerde vorm. $\square$

Gevolg 4.31. *Zij A, B en $\phi_{\mathbb{B}}$ zoals in de vorige stelling. De commutant van $\phi_{\mathbb{B}}(A) \subset B$ is isomorf met $\bigoplus_{j=1}^{m}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{N_{ji}}(k))$ en dit is een deelalgebra van B.*

Gevolg 4.32. *Zij A, B en $\phi_{\mathbb{B}}$ zoals in de vorige stelling. De baan $GL(B)\phi_{\mathbb{B}}$ van $\phi_{\mathbb{B}}$ onder de werking zoals gedefinieerd in propositie 4.21 is gelijk aan*

$$GL(B)/\prod_{j=1}^{m}(\prod_{i=1}^{n} GL(N_{ji})) = GL(B)/GL(\phi_{\mathbb{B}}(A)').$$

Voorbeeld 4.33. Zij $A = k \oplus \mathbb{M}_2(k)$ en $B = \mathbb{M}_3(k)$. We hebben eerder gezien dat hiervoor twee verschillende Bratteli diagrammen zijn: $\mathbb{B}^1$ en $\mathbb{B}^2$ met bijbehorende afbeeldingen:

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{B}^1} : &\lambda \oplus a \mapsto \lambda \oplus \lambda \oplus \lambda \text{ en} \\ \phi_{\mathbb{B}^2} : &\lambda \oplus a \mapsto \lambda \oplus a \end{aligned}$$

voor alle $\lambda \in k$ en $a \in \mathbb{M}_2(k)$. De commutant van $\phi_{\mathbb{B}^1}(A) \subset B$ is isomorf met $\mathbb{M}_3(k)$. We passen namelijk gevolg 4.31 toe met $N_{11} = 0$ en $N_{12} = 3$. De commutant van $\phi_{\mathbb{B}^2}(A)$ is isomorf met $k \oplus k$. Hier passen we gevolg 4.31 toe met $N_{11} = 1$ en $N_{12} = 1$.
We kunnen ook de baan $GL(3)\phi_{\mathbb{B}^1}$ bepalen met gevolg 4.32. Deze is gelijk aan $GL(3)/GL(3)$. Dit is ook wel te verwachten aangezien elke basistransformatie van $\phi_{\mathbb{B}^1}(\lambda \oplus a)$ gelijk is aan $\phi_{\mathbb{B}^1}(\lambda \oplus a)$, er geldt immers:

$$g\phi_{\mathbb{B}^1}(\lambda \oplus a)g^{-1} = g \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} g^{-1} = gg^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \phi_{\mathbb{B}^1}(\lambda \oplus a)$$

voor een $g \in GL(3)$.
De baan $GL(3)\phi_{\mathbb{B}^2}$ bepalen we op de zelfde manier en is gelijk aan $GL(3)/(GL(1) \times GL(1))$. Hiermee liggen alle basistransformaties van $\phi_{\mathbb{B}^2}$ vast. Alles samengenomen hebben we nu alle homomorfismen $\phi : A \to B$ precies beschreven.

Uit deze paragraaf kunnen we concluderen dat voor A en B twee matrixalgebra's met Bratteli diagram $\mathbb{B}$ en bijbehorende afbeelding $\phi_{\mathbb{B}} : A \to B$, De baan van $\phi_{\mathbb{B}}$ gelijk is aan

$$\frac{GL(B)}{GL(\phi_{\mathbb{B}}(A)')}.$$

Alle mogelijke homomorfismen tussen A en B worden dan gegeven door

$$\coprod_{\mathbb{B}} \frac{GL(B)}{GL(\phi_{\mathbb{B}}(A)')}. \tag{1}$$

De verzameling van homomorfismen is immers te splitsen in disjuncte deelverzamelingen $GL(B)/GL(\phi_{\mathbb{B}}(A)')$ voor elk Bratteli diagram.

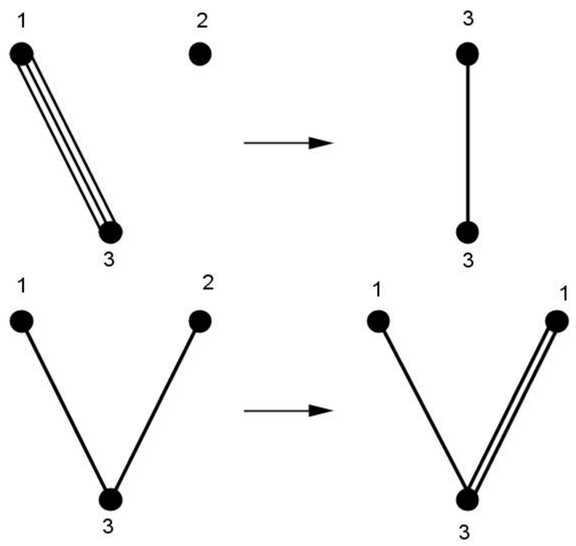
4.3 Het duale Bratteli diagram

We gaan hier wat dieper in op de relaties tussen de commutant en Bratteli diagrammen.

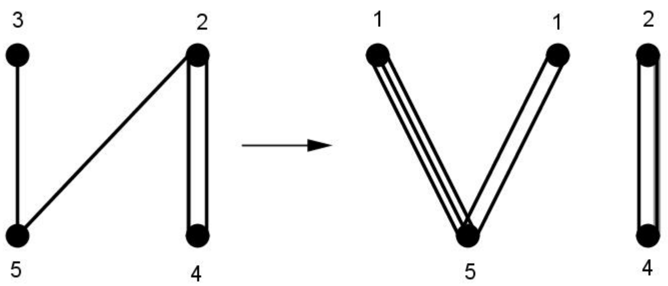
Definitie 4.34. Zij $\mathbb{B}$ een Bratteli diagram bij twee matrixalgebra's $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $B = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{M}_{c_j}(k)$. We maken hierbij een nieuw diagram als volgt. We maken twee horizontale rijen van vertices, waarbij de onderste hetzelfde is als die van het originele Bratteli diagram. Op de bovenste rij staan mn vertices, gelabeld met $N_{11}, \ldots, N_{1n}, \ldots, N_{m1}, \ldots, N_{mn}$. Vervolgens trekken we d_i lijnen tussen N_{ji} en c_j. Anders gezegd gebeurt er het volgende: We bekijken elke mogelijke combinatie van de d_i's en de c_j's. Per combinatie zijn er N_{ji} verbindingslijnen getrokken. We veranderen dan de vertex d_i in een vertex met label N_{ji} en trekken we tussen N_{ji} en c_j precies d_i verbindingslijnen. Dit doen we voor elke combinatie. Het diagram wat zo ontstaat noemen we het *duale Bratteli diagram.*

Opmerking 4.35. Wanneer een N_{ji} gelijk is aan 0, krijgen we dus eigenlijk een vertex met label 0, waarvan uit d_i lijnen naar c_j gaan. In dit geval laten we de vertex met bijbehorende lijnen weg.

Voorbeeld 4.36. We zien de twee Bratteli diagrammen bij $A = k \oplus \mathbb{M}_2(k)$ en $B = \mathbb{M}_3(k)$ met hun corresponderende duale diagram:



Voorbeeld 4.37. We zien hier het Bratteli diagram bij $A = \mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_3(k)$ en $B = \mathbb{M}_5(k) \oplus \mathbb{M}_3(k)$ met het daarbij behorende duale Bratteli diagram:



Propositie 4.38. *Zij A en B twee matrixalgebra's met een Bratteli diagram $\mathbb{B}$ met bijbehorende afbeelding $\phi_{\mathbb{B}}$. Het duale Bratteli diagram $\mathbb{B}^*$ is weer een Bratteli diagram, in de zin dat $\mathbb{B}^*$ correspondeert met een homomorfisme $\phi : \phi_{\mathbb{B}}(A)' \to B$.*

Bewijs. We schrijven $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $B = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{M}_{c_j}(k)$ en we geven het homomorfisme weer als:

$$\phi_{\mathbb{B}} : A \to B, \quad a \mapsto \bigoplus_{j=1}^{m} (\bigoplus_{i=1}^{n} N_{ji} a_i).$$

Het duale diagram correspondeert volgens zijn constructie en Opmerking 3.21 met de volgende afbeelding:

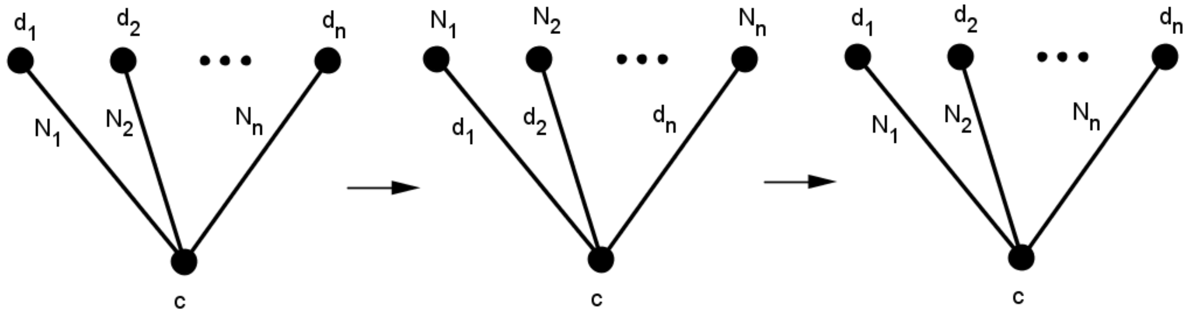
$$\psi : \bigoplus_{j=1}^{m}\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{N_{ji}}(k)\Big) \to B, \qquad (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}) \mapsto \bigoplus_{j=1}^{m}\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} d_i a_{ji}\Big).$$

Er geldt precies dat $\sum_{i=1}^{n} d_i N_{ji} = c_j$ voor alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Daarnaast weten we uit Gevolg 4.31 dat $\bigoplus_{j=1}^{m}(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{N_{ji}}(k))$ isomorf is met de commutant van $\phi_{\mathbb{B}}(A) \subset B$ is.

Andersom hebben we dat wanneer we eerst de commutant $\phi_{\mathbb{B}}(A)'$ van $\phi_{\mathbb{B}}(A) \subset B$ bepalen, we zien dat we precies het homomorfisme $\psi : \phi_{\mathbb{B}}(A)' \to B$ zoals boven kunnen maken. Het bijbehorende Bratteli diagram is dan $\mathbb{B}^*$. □

Propositie 4.39. *Zij A een matrixalgebra en $B = \mathbb{M}_c(k)$ een matrixalgebra bestaande uit één component. Zij $\phi : A \to B$ een homomorfisme en $\mathbb{B}$ het bijbehorende Bratteli diagram. Er geldt $\phi(A)'' = \phi(A)$.*

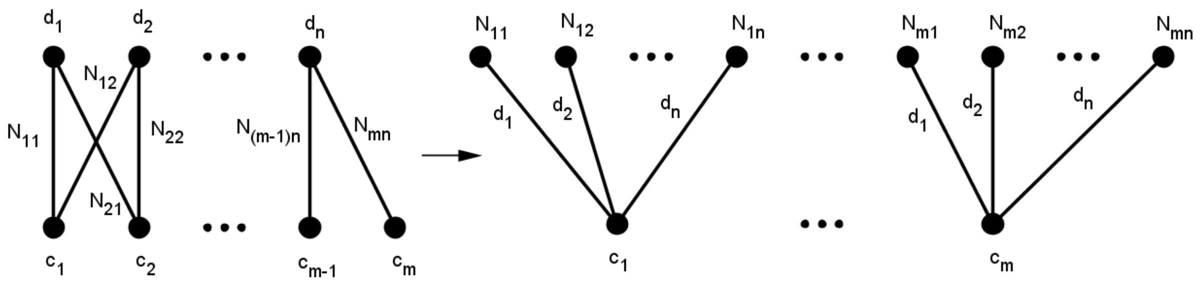
Bewijs. We schrijven $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$. Uit de vorige propositie weten we dat het voldoende is om te bewijzen dat het duale Bratteli diagram van $\mathbb{B}^*$ gelijk is aan $\mathbb{B}$. Dit zien we als volgt:



□

Stelling 4.40. *Zij A en B twee matrixalgebra's. Zij $\phi : A \to B$ een homomorfisme en $\mathbb{B}$ het bijbehorende Bratteli diagram. Er geldt $\phi(A)' = \phi(A)'''$.*

Bewijs. We schrijven $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $B = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{M}_{c_j}(k)$. We bekijken het duale Bratteli diagram $\mathbb{B}^*$ van $\mathbb{B}$. Deze ziet er als volgt uit:



We zien dat $\mathbb{B}^*$ uit m samenhangcomponenten bestaat, waarbij elke component van de vorm is zoals in de vorige propositie. Dus geldt dat $\mathbb{B}^{***} = \mathbb{B}^*$ en dus $\phi(A)' = \phi(A)'''$. □

Opmerking 4.41. Uit de vorige voorbeelden van diagrammen is duidelijk geworden dat het duale Bratteli diagram bij een gegeven Bratteli diagram bij matrixalgebra's A en B aan een aantal eigenschappen voldoet:

- Het duale diagram bestaat uit precies m samenhangcomponenten.
- Er gaat nooit een lijn vanuit N_{ji} naar c_k met $k \neq j$.
- Een Bratteli diagram dat niet uit m samenhangscomponenten bestaat kan geen duaal Bratteli diagram zijn.

4.4 Automorfismen

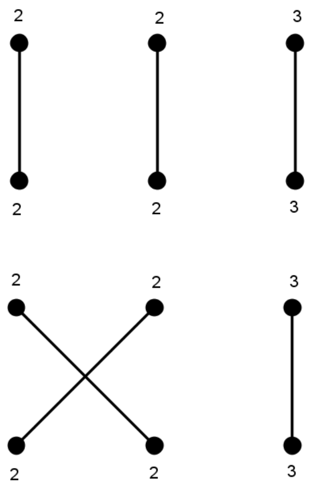
We zullen in deze paragraaf bekijken hoe we de automorfismen van een matrixalgebra kunnen omschrijven.

Stelling 4.42. *Zij $A = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ een matrixalgebra. De volgende Bratteli diagrammen zijn mogelijk voor de automorfismen van A:*

- *Het Bratteli diagram waarin d_i verbonden wordt door één lijn met d_i voor alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Het bijbehorende automorfisme noemen we α_{id}.*
- *De Bratteli diagrammen die corresponderen met een basistransformatie van α_{id} die blokken van gelijke dimensie verwisselt.*

Bewijs. Het is duidelijk dat de bovengenoemde diagrammen inderdaad Bratteli diagrammen zijn horend bij A. We gaan dus nog bewijzen dat er geen andere mogelijkheden zijn. Zij $i \in \{1, \dots, n\}$ zodat $d_i \geq d_j$ voor alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Vanuit deze vertex moet er een lijn getrokken worden naar een vertex beneden. Als er namelijk geen lijn wordt getrokken, is de bijbehorende afbeelding van het diagram geen bijectie en dus geen element van $\mathrm{Aut}(A)$. Volgens de eisen van een Bratteli diagram moet er dan een lijn gaan vanuit d_i naar een vertex d_j zodat $d_i = d_j$. Bekijk vervolgens het grootste element van de verzameling $\{d_1, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_n\}$ en bekijk weer dezelfde situatie. Omdat $\{1, \dots, n\}$ eindig is, moet een Bratteli diagram er inderdaad zoals beweerd uitzien. $\square$

Voorbeeld 4.43. Zij $A = \mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_3(k)$. De mogelijke Bratteli diagrammen van A zien er als volgt uit:



Propositie 4.44. *Zij A een matrixalgebra. Alle automorfismen van A worden gegeven door:*

$$\coprod_{\mathbb{B}} PGL(A).$$

Bewijs. Voor een willekeurig Bratteli diagram hebben we dat de commutant $\phi_{\mathbb{B}}(A)'$ van $\phi_{\mathbb{B}}(A) \subset A$ gelijk is aan $\{a \in A | \phi_{\mathbb{B}}(b)a = a\phi_{\mathbb{B}}(b) \text{ voor alle } b \in A\}$. Omdat de afbeelding $\phi_{\mathbb{B}}$ een bijectie is, is de commutant gelijk aan $Z(A)$. Alle mogelijke automorfismen worden dan gegeven door:

$$\coprod_{\mathbb{B}} GL(A)/GL(Z(A)) = \coprod_{\mathbb{B}} PGL(A).$$

□

Definitie 4.45. Voor een algebra A noemen we $PGL(A)$ de *projectieve lineaire groep* van A.

Opmerking 4.46. Wat opvalt is dat dit geen groep is, terwijl we weten dat de automorfismen wel een groep vormen. We willen immers ook graag weten hoe we elementen moeten vermenigvuldigen. We bewijzen daartoe de volgende stelling.

Stelling 4.47. *Voor een matrixalgebra A geldt dat* $\mathrm{Aut}(A) = PGL(A) \rtimes S(A)$*, waarbij $S(A)$ de verzameling van alle permutaties is van blokken van A met dezelfde dimensie.*

Bewijs. Allereerst merken we op dat $S(A)$ inderdaad een groep is en bevat is in $\mathrm{Aut}(A)$, dus $S(A)$ is een ondergroep.
Vervolgens controleren we dat $PGL(A)$ een normaaldeler is van $\mathrm{Aut}(A)$. Het is duidelijk dat $PGL(A)$ een ondergroep is van $\mathrm{Aut}(A)$. We nemen een element $[h] \in PGL(A)$ en kiezen de representant h uit deze klasse. Voor een $\alpha \in \mathrm{Aut}(A)$ bekijken we nu $\alpha h \alpha^{-1}(x)$. Er geldt:

$$\alpha h \alpha^{-1}(x) = \alpha h(\alpha^{-1}(x))(h)^{-1} = \alpha(h)x(\alpha(h))^{-1} = \alpha(h)(x).$$

Er geldt dus $\alpha h \alpha^{-1} = \alpha(h)$. Een element g zit in de zelfde klasse als h als $g = hg'$ voor een $g' \in Z(GL(A))$. We zien dan dat $\alpha(hg')\alpha^{-1} = \alpha(h)\alpha(g')$.

We beweren dat dit in dezelfde klasse terecht komt als $\alpha(h)$. Daartoe moeten we het volgende bewijzen:
Voor het beeld van α beperkt tot het centrum van $GL(A)$ geldt: $\mathrm{Im}\, \alpha|_{Z(GL(A))} = Z(GL(A))$.
Voor $h \in Z(GL(A))$ geldt voor alle $b \in GL(A)$ met $a \in GL(A)$ zodat $\alpha(a) = b$:

$$\alpha(h)b = \alpha(h)\alpha(a) = \alpha(ha) = \alpha(ah) = \alpha(a)\alpha(h) = b\alpha(h).$$

Dus hebben we dat $\alpha[h]\alpha^{-1} = [\alpha(h)] \in PGL(A)$.

Merk hier op dat we gebruikt hebben dat $\mathrm{Im}(\alpha|_{GL(A)}) = GL(A)$.

We gaan nu na dat de automorfismen inderdaad een semidirect product vormen van $PGL(A)$ en $S(A)$. We weten dat elk element α uit $\mathrm{Aut}(A)$ van de vorm $\alpha(\cdot) = h\phi_{\mathbb{B}}(\cdot)h^{-1}$ is voor een $h \in GL(A)$ en een Bratteli diagram $\mathbb{B}$. Hierbij hebben we in deze paragraaf gezien dat elk Bratteli diagram kan ontstaan uit het triviale Bratteli diagram door een permutatie van blokken van gelijke dimensie. De corresponderende afbeelding is dus een permutatie: $\sigma_{\mathbb{B}}$. Dus:

$$\alpha(\cdot) = h\phi_{\mathbb{B}}(\cdot)h^{-1} = h\sigma_{\mathbb{B}}(\cdot)h^{-1}.$$

Wanneer we een andere representant $g = hg'$ nemen, zien we dat:

$$hg'\sigma_{\mathbb{B}}(\cdot)g'^{-1}h^{-1} = hg'g'^{-1}\sigma_{\mathbb{B}}(\cdot)h^{-1} = h\sigma_{\mathbb{B}}(\cdot)h^{-1} = \alpha(\cdot).$$

We kunnen dus concluderen dat α vastligt door $[h]$ en $\sigma_{\mathbb{B}}$. Bovendien ligt hij ook uniek vast. Bij elke andere mogelijke σ en $g \notin [h]$ krijgen we immers een ander automorfisme. □

Notatie 4.48. We noteren voor een homomorfisme α van een algebra A: $\alpha = ([h], \sigma_{\mathbb{B}})$, waar $[h] \in PGL(A)$ en $\sigma_{\mathbb{B}} \in S(A)$.

Propositie 4.49. *Voor twee automorfismen* $\alpha_1 = ([h_1], \sigma_{\mathbb{B}_1})$ *en* $\alpha_2 = ([h_2], \sigma_{\mathbb{B}_2})$ *wordt het product* $\alpha_1 \circ \alpha_2$ *gegeven door* $([h_1\sigma_{\mathbb{B}}(h_2)], \sigma_{\mathbb{B}_1} \circ \sigma_{\mathbb{B}_2})$*. Het inverse homomorfisme wordt gegeven door* $\alpha_1^{-1} = ([h]^{-1}, \sigma_{\mathbb{B}_1}^{-1})$*.*

Bewijs. We schrijven uit wat er gebeurt met $\alpha_1 \circ \alpha_2$ toegepast op een element $x \in A$:

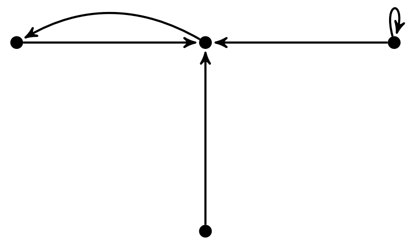
$$\alpha_1 \circ \alpha_2(x) = \alpha_1(h_2\sigma_{\mathbb{B}_2}(x)h_2^{-1}) = h_1\sigma_{\mathbb{B}_1}(h_2)\sigma_{\mathbb{B}_1} \circ \sigma_{\mathbb{B}_2}(x)\sigma_{\mathbb{B}_1}(h_2^{-1})h_1^{-1}.$$

Wanneer we hier een andere representant uit de klasse van h_1 zouden kiezen, is deze van de vorm $h_1 g$ waarbij g in het centrum van $GL(A)$ zit. We zien dan dat deze g in de berekening wegvalt. Hetzelfde geldt als we een andere representant uit $[h_2]$ kiezen. We gebruiken dan dat $\alpha(g)^{-1} = \alpha(g^{-1})$ voor alle automorfismen $\alpha : A \to A$ en $g \in GL(A)$. Het product van α_1 en α_2 wordt dus gegeven door $([h_1\sigma_{\mathbb{B}_1}(h_2)], \sigma_{\mathbb{B}_1} \circ \sigma_{\mathbb{B}_2})$.
We hebben dat $\alpha_1^{-1}(x) = h^{-1}\sigma_{\mathbb{B}_1}^{-1}(x)h$. En daarmee zijn we klaar. We weten namelijk ook hier dat de keuze van de representant niet uitmaakt. □

5 Quivers

Definitie 5.1. Een *quiver* is een gerichte graaf met mogelijk lussen en meer dan een kant tussen twee vertices.

Voorbeeld 5.2. Een voorbeeld van een quiver:



We noteren een quiver Q als $Q = (I, E)$ waarbij I een verzameling vertices is en E een kantenverzameling. Voor een $e \in E$ noteren we $s(e)$ voor de source van e en $t(e)$ voor de target van e:

$$s(e) \xrightarrow{e} t(e)$$

Definitie 5.3. Een *(matrixalgebra-)representatie π van een quiver* Q is een toewijzing van een matrixalgebra A_i aan elke vertex $i \in I$ en een homomorfisme $\pi_e : A_{s(e)} \to A_{t(e)}$ aan elke $e \in E$.

Opmerking 5.4. In het algemeen is een representatie van een quiver een toewijzing van een vectorruimte aan elke vertex en een lineaire afbeelding aan elke kant. Wanneer we in het vervolg over representaties spreken, zullen we matrixalgebra-representaties bedoelen.

Definitie 5.5. Twee representatie π en π' van een quiver Q heten *equivalent* als $A_i = A'_i$ voor alle $i \in I$ en er een familie van afbeeldingen $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ is, waarbij $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(A_i)$, zodat

$$\pi_e = \alpha_{t(e)} \circ \pi'_e \circ \alpha^{-1}_{s(e)}.$$

Notatie 5.6. Bij een gegeven quiver Q noteren we de ruimte van alle mogelijke representaties van Q als $\mathcal{X}$. De collectie van alle automorfismen α_i voor elke $i \in I$ vormt een groep welke we noteren als $\mathcal{G}$.

Propositie 5.7. *Voor een quiver $Q = (I, E)$ hebben we een werking van $\mathcal{G}$ op $\mathcal{X}$ die gegeven wordt door:*

$$\{\pi_e\}_{e\in E} \mapsto \{\alpha_{t(e)} \circ \pi_e \circ \alpha^{-1}_{s(e)}\}_{e\in E}.$$

Bewijs. We controleren de eisen van een groepswerking:

- Het eenheidselement in $\mathcal{G}$ is $\{id\}_{i\in I}$. We laten dit element werken op een $\{\pi_e\}_{e\in E} \in \mathcal{X}$: $\{id \circ \pi_e \circ id^{-1}\}_{e\in E} = \{\pi_e\}_{e\in E}$.

- Neem $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ en $\{\alpha'_i\}_{i\in I} \in \mathcal{G}$. We passen hun werking na elkaar toe op een $\{\pi_e\}_{e\in E} \in \mathcal{X}$:

$$\begin{aligned}\{\pi_e\}_{e\in E}\{&\mapsto \alpha_{t(e)} \circ \pi_e \circ \alpha^{-1}_{s(e)}\}_{e\in E}\\ &\mapsto \{\alpha'_{t(e)} \circ \big(\alpha_{t(e)} \circ \pi_e \circ \alpha^{-1}_{s(e)}\big) \circ \alpha'^{-1}_{s(e)}\}_{e\in E}\\ &= \{\big(\alpha'_{t(e)} \circ \alpha_{t(e)}\big) \circ \pi_e \circ \big(\alpha_{s(e)} \circ \alpha'_{s(e)}\big)^{-1}\}_{e\in E}.\end{aligned}$$

  Dit geeft dus hetzelfde als $\{\alpha'_i \circ \alpha_i\}_{i\in I}$ laten werken op $\{\pi_e\}_{e\in E}$.

□

We willen graag bepalen wat $\mathcal{X}$ is bij een gegeven quiver $Q = (I, E)$ en daarnaast ook wat $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ is. De laatste geeft namelijk met bovenstaande werking precies de ruimte van alle mogelijke representaties modulo equivalentie weer. We gaan nu kijken hoe $\mathcal{X}$ en $\mathcal{G}$ er precies uit zien. We zullen dit doen voor het geval dat aan elke vertex $i \in I$ een matrixalgebra A_i is toegewezen. Merk op dat deze toewijzing zodanig is dat als er een kant tussen twee vertices loopt er ook daadwerkelijk een homomorfisme tussen de twee corresponderende algebra's bestaat.

Propositie 5.8. *Zij $Q = (I, E)$ een quiver. We bekijken representaties waarbij aan elke $i \in I$ een matrixalgebra A_i is toegewezen. Er geldt dan dat de ruimte van representaties $\mathcal{X}$ gelijk is aan:*

$$\prod_{e \in E} \coprod_{\mathbb{B}_{(A_{s(e)}, A_{t(e)})}} \frac{GL(A_{t(e)})}{GL(\phi_{\mathbb{B}}(A_{s(e)})')},$$

waarbij $\mathbb{B}_{(A_{s(e)}, A_{t(e)})}$ een Bratteli diagram is horend bij $A_{s(e)}$ en $A_{t(e)}$ en $\phi_{\mathbb{B}}$ de daarbij behorende afbeelding.

Bewijs. We bekijken een willekeurige kant $e \in E$. We zoeken allereerst alle mogelijke homomorfismen tussen $A_{s(e)}$ en $A_{t(e)}$. We weten uit (1) dat de mogelijkheden gegeven worden door:

$$\coprod_{\mathbb{B}_{(A_{s(e)}, A_{t(e)})}} \frac{GL(A_{t(e)})}{GL(\phi_{\mathbb{B}}(A_{s(e)})')}.$$

Om alle mogelijke representaties te krijgen moeten we het product nemen over alle elementen $e \in E$. □

Propositie 5.9. *Zij $Q = (I, E)$ een quiver. We bekijken representaties waarbij aan elke $i \in I$ een matrixalgebra A_i is toegewezen. Er geldt dat $\mathcal{G} = \prod_{i \in I} PGL(A_i) \rtimes S(A_i)$*

Bewijs. Dit volgt direct uit Stelling 4.47. □

We gaan nu kijken naar het samenstellen van Bratteli diagrammen en het maken van een inverse diagram voor een diagram dat correspondeert met een automorfisme. Dit blijkt later nodig te zijn.

Definitie 5.10. Laat $\mathbb{B}$ een Bratteli diagram zijn bij matrixalgebra's $A_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{d_i}(k)$ en $A_2 = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{M}_{c_j}(k)$ en $\mathbb{B}'$ een Bratteli diagram bij matrixalgebra's A_2 en $A_3 = \bigoplus_{q=1}^{p} \mathbb{M}_{b_q}(k)$. We kunnen de diagrammen *samenstellen* door vanuit elke vertex d_i in de bovenste rij $\sum_{j=1}^{m} N'_{qj} N_{ji}$ lijnen te tekenen naar vertex b_q. We noteren dit diagram als $\mathbb{B}' \circ \mathbb{B}$.

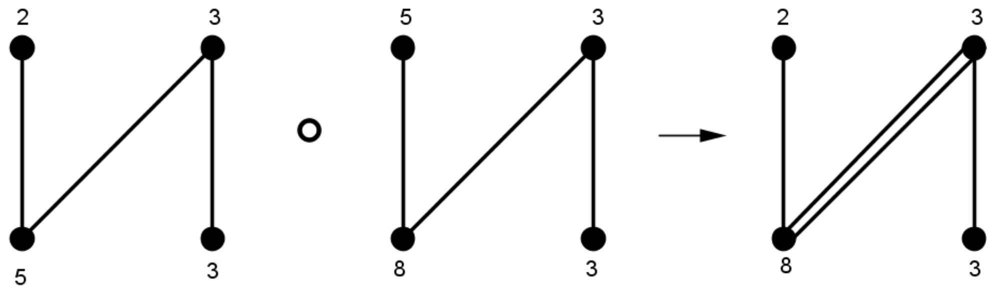
Propositie 5.11. *Het samenstellen van twee Bratteli diagrammen is goed gedefinieerd. Er geldt: $\phi_{\mathbb{B}'} \circ \phi_{\mathbb{B}} = \phi_{\mathbb{B}' \circ \mathbb{B}}$, waar we de algebra's A_1, A_2 en A_3 en de diagrammen $\mathbb{B}$ en $\mathbb{B}'$ zoals boven bekijken.*

Bewijs. Er geldt:

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathbb{B}'} \circ \phi_{\mathbb{B}}(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n) &= \phi_{\mathbb{B}'}(\bigoplus_{j=1}^{m}(\bigoplus_{i=1}^{n} N_{ji} a_i)) \\
&= \bigoplus_{q=1}^{p}(\bigoplus_{j=1}^{m} N'_{qj}(\bigoplus_{i=1}^{n} N_{ji} a_i)) \\
&= \bigoplus_{q=1}^{p}(\bigoplus_{i=1}^{n}(\bigoplus_{j=1}^{m} N'_{qj} N_{ji}) a_i)).
\end{aligned}$$

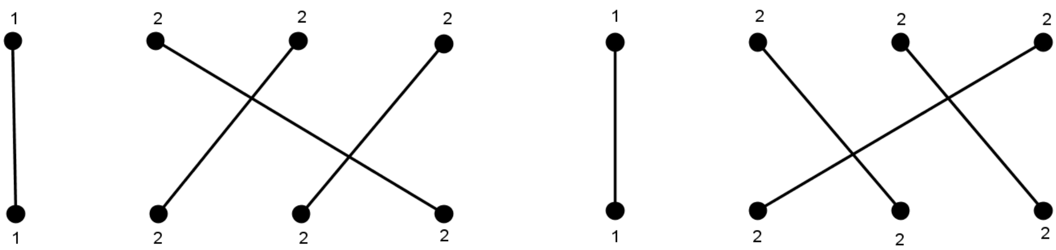
Dit is per constructie gelijk aan $\phi_{\mathbb{B}'\circ\mathbb{B}}(a_1 \oplus \ldots \oplus a_n)$ voor alle $a_1 \oplus \ldots \oplus a_n \in A$. $\square$

Voorbeeld 5.12. We zien hier een Bratteli diagram bij $\mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_3(k)$ en $\mathbb{M}_5(k) \oplus \mathbb{M}_3$ dat wordt samengesteld met een Bratteli diagram bij $\mathbb{M}_5(k) \oplus \mathbb{M}_3$ en $\mathbb{M}_8(k) \oplus \mathbb{M}_3$:



Definitie 5.13. Zij A een matrixalgebra en $\mathbb{B}$ een Bratteli diagram bij een automorfisme van A. We definiëren het inverse Bratteli diagram $\mathbb{B}^{-1}$ door het diagram dat hetzelfde is als $\mathbb{B}$ maar waar de onderste en bovenste rij vertices verwisseld zijn. De edges blijven met dezelfde vertices verbonden. Het diagram ziet er echter anders uit.

Voorbeeld 5.14. Hier zien we een Bratteli diagram van $\mathbb{M}_1(k) \oplus \mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_2(k) \oplus \mathbb{M}_2(k)$ met daarnaast zijn inverse:



Propositie 5.15. *Voor een matrixalgebra A met Bratteli diagram $\mathbb{B}$ bij een automorfisme geldt dat $\sigma_{\mathbb{B}} \circ \sigma_{\mathbb{B}^{-1}} = \sigma_{\mathbb{B}^{-1}} \circ \sigma_{\mathbb{B}} = \sigma_{id}$.*

Bewijs. We stellen de twee Bratteli diagrammen samen. Dit samengestelde diagram correspondeert dan met $\sigma_{\mathbb{B}} \circ \sigma_{\mathbb{B}^{-1}}$. We bekijken een vertex i. Er gaan $\sum_{j=1}^{m} N'_{qj} N_{ji}$ lijnen naar vertex q. We weten uit stelling 4.42 hoe de mogelijke diagrammen voor automorfismen van A er uit kunnen zien. Er geldt dus dat N_{ji} voor precies een enkele j gelijk is aan 1, in elk ander geval is hij gelijk aan 0. Voor deze j is $N_{qj} = 0$ behalve als $q = i$ per constructie van het diagram. Er wordt dus één lijn getrokken vanaf elke vertex recht naar beneden. $\square$

Opmerking 5.16. Voor een automorfisme $\alpha = ([h], \sigma_{\mathbb{B}})$ kunnen we voor de inverse $\alpha^{-1} = ([h^{-1}], \sigma_{\mathbb{B}}^{-1})$ ook schrijven: $([h^{-1}], \sigma_{\mathbb{B}^{-1}})$.

Notatie 5.17. Een homomorfisme π_e tussen A_i en A_j waar $i \neq j$ wordt bepaald door $(\mathbb{B}_e, [g_e])$ waar $[g_e] \in GL(A_j)/GL(\phi_{\mathbb{B}_e(A)'})$. Dit laatste volgt rechtstreeks uit 1. We zullen een element uit $\mathcal{X}$ in het vervolg dan ook noteren als $\{(\mathbb{B}_e, [g_e])\}_{e\in E}$.

Stelling 5.18. *Bij een gegeven quiver $Q = (I, E)$, waarbij aan elke i een matrixalgebra A_i is toegewezen, kunnen we de werking van $\mathcal{G}$ op $\mathcal{X}$ zoals beschreven in 5.7 herschrijven. Een element $\{([h_i], \sigma_{\mathbb{B}_i})\}_{i\in I} \in \mathcal{G}$ werkt op een element $\{(\mathbb{B}_e, [g_e])\}_{e\in E} \in \mathcal{X}$ door:*

$$\{(\mathbb{B}_e, [g_e])\}_{e\in E} \mapsto \{(\sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}} \circ \mathbb{B}_e \circ \sigma_{\mathbb{B}_{s(e)}}^{-1}, [h_{t(e)} \sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}}(g_e) \sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}} \circ \phi_{\mathbb{B}}(h_{s(e)}^{-1})])\}_{e\in E}.$$

Bewijs. Een element $\{\pi_e\}_{e\in E}$ uit $\mathcal{X}$ wordt onder de werking van een element $\{\alpha_i\}_{i\in I} \in \mathcal{G}$ gestuurd naar $\{\alpha_{t(e)} \circ \pi_e \circ \alpha^{-1}_{s(e)}\}_{e\in E}$. Voor het gemak kijken we naar een enkele $e \in E$. Met de vorige opmerking kunnen we dit anders opschrijven. We kijken wat er onder de werking gebeurt met π_e:

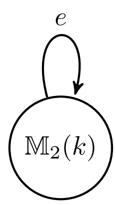
$$\begin{aligned}
\pi_e(\cdot) &\mapsto \alpha_{t(e)} \circ \pi_e \circ \alpha^{-1}_{s(e)}(\cdot) \\
&= \alpha_{t(e)} \circ \pi_e(h^{-1}_{s(e)}\sigma^{-1}_{\mathbb{B}_{s(e)}}(\cdot)h_{s(e)}) \\
&= \alpha_{t(e)}(g_e\phi_{\mathbb{B}}(h^{-1}_{s(e)})\phi_{\mathbb{B}} \circ \sigma^{-1}_{\mathbb{B}_{s(e)}}(\cdot)\phi_{\mathbb{B}}(h_{s(e)})g_e^{-1}) \\
&= h_{t(e)}\sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}}(g_e)\sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}} \circ \phi_{\mathbb{B}}(h^{-1}_{s(e)})\sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}} \circ \phi_{\mathbb{B}} \circ \sigma^{-1}_{\mathbb{B}_{s(e)}}(\cdot)\sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}} \circ \phi_{\mathbb{B}}(h_{s(e)})\sigma_{\mathbb{B}_{t(e)}}(g_e^{-1})h^{-1}_{t(e)}.
\end{aligned}$$

We hebben nu gekeken naar de representant $g_e \in [g_e]$ en $h_i \in [h_i]$. De keuze van een representant maakt niet uit, want voor een representant uit $[h_i]$ geldt dat deze van de vorm $h_i g$ is met g een element van $Z(GL(A_i))$. Deze commuteert dus met alle elementen uit A_i en werkt daarmee triviaal. Dit zien we door het uit te schrijven. Voor een andere representant uit $[g_e]$ geldt dat deze van de vorm $g_e g$ is, waarbij g commuteert met $\phi_{\mathbb{B}}(\cdot)$. Wanneer we voor $g_e g$ dezelfde berekening uitvoeren zien we dat deze ook wegvalt.

□

We zullen nu een aantal voorbeelden geven waarin we $\mathcal{X}/\mathcal{G}$ specifiek bepalen.

Voorbeeld 5.19. Laat de volgende quiver gegeven zijn:

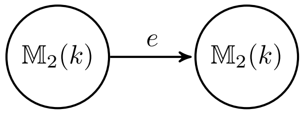


Bij de automorfismen van $\mathbb{M}_2(k)$ naar $\mathbb{M}_2(k)$ is maar één Bratteli diagram mogelijk. We hebben dus te maken met de permutatie die niets doet. De ruimte van representaties $\mathcal{X}$ is gelijk aan $\frac{GL(2)}{GL(1)} = PGL(2)$. De ruimte $\mathcal{G}$ is ook gelijk aan $PGL(2)$. We bekijken de werking van $\mathcal{G}$ op een element $\pi \in \mathcal{X}$ dat we kunnen noteren als $([g])$ met $[g] \in PGL(2)$. Het element $[g]$ wordt gestuurd naar $[hgh^{-1}]$ voor een $[h] \in \mathcal{G}$. De werking wordt dus gegeven door conjugeren. Dit komt omdat de source en target in deze quiver met elkaar overeenkomen. We noteren:

$$\mathcal{X}/\mathcal{G} = PGL(2)/PGL(2).$$

Dit bestaat alleen uit de triviale klasse.

Voorbeeld 5.20. Stel we hebben de volgende quiver gegeven:



We weten dat er bij een afbeelding van $\mathbb{M}_2(k)$ naar $\mathbb{M}_2(k)$ maar één Bratteli diagram mogelijk is. Dit is namelijk het Bratteli diagram dat correspondeert met de identieke afbeelding. Zo is er voor de automorfismen ook maar één Bratteli diagram mogelijk en dus hebben we te maken met de permutatie die niets doet. We weten dat de ruimte van alle mogelijke representaties $\mathcal{X}$ gelijk is aan $\frac{GL(2)}{GL(1)} = PGL(2)$. Daarnaast weten we ook dat de automorfismen op de source overeenkomen met $PGL(2)$ en zo ook voor de target. We gaan kijken hoe de werking op een element $\pi \in \mathcal{X}$ eruit ziet. We kunnen π in dit geval beschrijven met $([g])$ voor een $[g] \in PGL(2)$, omdat we te maken hebben met maar één Bratteli diagram. Deze wordt onder de werking van een element $([h_t],[h_s]) \in PGL(2) \times PGL(2)$ gestuurd naar $[h_t g h_s^{-1}]$. We zien dus dat $PGL(2)$ behorend bij de target, links werkt op $[g]$ als $[h_t g]$ en dat daarnaast $PGL(2)$ behorend bij de source, rechts werkt op $[g]$ als $[g h_s^{-1}]$. We hebben dus te maken met dubbele nevenklassen en daarom geldt:

$$\mathcal{X}/\mathcal{G} = PGL(2) \setminus PGL(2)/PGL(2).$$

Dit bestaat alleen uit de triviale klasse.

Voorbeeld 5.21. Laat de volgende quiver gegeven zijn:

$$\mathbb{M}_2(k) \xrightarrow{e_1} \mathbb{M}_2(k) \xrightarrow{e_2} \mathbb{M}_4(k)$$

Voor elke mogelijk homomorfisme tussen de algebra's $\mathbb{M}_2(k)$ en $\mathbb{M}_2(k)$ en tussen $\mathbb{M}_2(k)$ en $\mathbb{M}_4(k)$ is maar één Bratteli diagram mogelijk. We zien dan dat $\mathcal{X}$ gelijk is aan $PGL(2) \times PGL(4)$ en dat we elk element hieruit kunnen weergeven als: $([g_{e_1}],[g_{e_2}])$. We gaan kijken hoe een element $([h_1],[h_2],[h_3])$ uit $\mathcal{G} = PGL(2) \times PGL(2) \times PGL(4)$ hierop werkt. De quiver representatie wordt gestuurd naar $([h_2 g_{e_1} h_1^{-1}],[h_3 g_{e_2} h_2^{-1}])$. We zien dus dat $PGl(2)$ rechts werkt op $[g_{e_1}]$ en dat $PGL(4)$ links werkt op $[g_{e_2}]$. Daarnaast hebben we dat $PGL(2)$ links werkt op $[g_{e_1}]$ en tegelijkertijd rechts werkt op $[g_{e_2}]$. We hebben dan dat:

$$\mathcal{X}/\mathcal{G} = PGL(4) \setminus PGL(4) \times_{PGL(2)} PGL(2)/PGL(2).$$

We concluderen uit dit hoofdstuk dat we bij een quiver $Q = (I,E)$ en een matrixalgebra A_i toegewezen aan elke vertex $i \in I$, in het algemeen de ruimte van representaties modulo equivalentie weer kunnen geven door:

$$\mathcal{X}/\mathcal{G} = \frac{\prod_{e\in E} \coprod_{\mathbb{B}_e} GL(A_{t(e)})/GL(\phi_{\mathbb{B}_e}(A_{s(e)})')}{\prod_{i\in I} PGL(A_i) \rtimes S(A_i)}.$$

Referenties

[1] B.V. Rajarama Bhat, George A. Elliott, Peter A. Fillmore *Lectures on Operator Theory*, American Mathematical Society, 2000, p. 175-176.

[2] O. Bratteli, *Inductive Limits of Finite Dimensional C^*-algebra's*, 1972.

[3] M. Marcolli and W. D. van Suijlekom, *Gauge Networks in Noncommutative Geometry*, 2013.

[4] G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Springer, 1997, p. 38-39.

[5] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob and E. Yudovina, *Introduction to representation theory*, 2011.

[6] G. Heckman, *Dictaat Symmetrie*, 2010