Radboud Universiteit Nijmegen

Bachelorscriptie

Classificatie van eindige spectrale tripels

Door:
Nick Lubbers

Onder begeleiding van:
Dr. W.D. van Suijlekom

7 januari 2013

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Deze scriptie geeft een korte inleiding in de theorie van algebra's, representaties, eindige spectrale tripels en quivers, met als doel het classificeren van eindige spectrale tripels aan de hand van quivers.

Een algebra over een lichaam is een vectorruimte waarop ook een vermenigvuldiging van vectoren is gedefinieerd. Deze vermenigvuldiging hoeft niet commutatief te zijn, wat een niet-commutatieve algebra oplevert. Alain Connes heeft een grote bijdrage geleverd aan niet - commutatieve meetkunde en één van de motivaties voor hem is dat er veel natuurlijke ruimten bestaan waarvoor klassieke gereedschappen als maattheorie, topologie en calculus, niet geldig zijn. Echter komen zulke ruimten wel overeen met een niet-commutatieve algebra [1]. Niet-commutatieve meetkunde is een generalisatie van (commutatieve) meetkunde [2].

Een eindig spectraal tripel is kort gezegd een algebra A welke getrouw gerepresenteerd is op een Hilbertruimte H, samen met een Hermitese afbeelding $D : H \to H$. Een representatie van A is een Hilbertruimte H samen met een homomorfisme van algebra's $\rho : A \to \mathrm{End}(H)$. Een motiverend voorbeeld van een eindig spectraal tripel is dat het Standaard Model zich laat vertalen in termen van een eindig spectraal tripel [3].

In deze scriptie beperken we ons tot eindige spectrale tripels, waarbij de ruimten eindig dimensionaal zijn en complex. Aangezien een eindig dimensionale Hilbertruimte H een eindig dimensionale inproductruimte is, spreken we voor het gemak over een complexe inproductruimte V.

Quivers zijn gerichte graven met eventueel lussen. Een representatie van een quiver is een toekenning van een vectorruimte V_i aan elke knoop i, en een toekenning van een lineaire afbeelding x_h aan elke pijl h. Een eindig dimensionale algebra is isomorf aan de directe som van al zijn paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele representaties. Zo is een eindig dimensionale algebra weer te geven als een eindig aantal knopen met daaraan toegekend deze representaties.

Een aangepaste definitie van een quiver en een aangepaste definitie van een quiver representatie geven de mogelijkheid om een eindig spectraal tripel weer te geven als quiver samen met een quiver representatie. Op deze wijze zijn alle eindige spectrale tripels (modulo unitaire equivalentie) te classificeren met behulp van quivers.

Voor zover bekend, is een classificatie van eindige spectrale tripels, zoals beschreven in deze scriptie, een toevoeging aan de theorie. Zie *Classification Of Finite Spectral Triples* van T. Krajewski, voor een classificatie van reële eindige spectrale tripels [4].

[1] "The existence of many natural spaces for which the classical set-theoretic tools of analysis, such as measure theory, topology, calculus, and metric ideas lose their pertinence, but which correspond very naturally to a noncommutative algebra.", pagina 7 van A. Connes, *Noncommutative Geometry* [2]

[2] Zie ook A. Sitarz, *Why Noncommutative Geometry?* [1]

[3] Zie Hoofdstuk 1.12 *Noncommutative geometry and the Standard Model* uit *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives* van A. Connes en M. Marcolli [3], of Hoofdstuk 3 uit *Niet-commutatieve Meetkunde en het Standaardmodel* van R. Jonker [11]

2 Lineaire algebra

Alvorens de definities van een algebra, een eindig spectraal tripel en een quiver te geven, volgt eerst een hoofdstuk met een selectie aan definities en proposities uit de lineaire algebra. Van een aantal proposities zijn bewijzen weggelaten, voor informatie en bewijzen zie [5], [6] en [7].

Definitie 2.1 (Interne directe som)**.** Zij V een vectorruimte. Dan is V een *interne directe som* van $V_1, \dots, V_n$ als alle $V_1, \dots, V_n$ lineaire deelruimten van V zijn, zodanig dat $V = V_1 + \dots + V_n$ en $V_i \cap V_j = \{0\}$ als $i \neq j$. We schrijven dan $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$.

Propositie 2.2. *Zij V een vectorruimte en $V_1, \dots, V_n$ lineaire deelruimten van V. Dan $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ d.e.s.d.a. elke $v \in V$ uniek te schrijven is als $v = v_1 + \dots + v_n$ met $v_i \in V_i$ voor elke $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Propositie 2.3. *Zij V een vectorruimte en V_1, V_2, V_3 lineaire deelruimten van V, dan*
(i) Als $V = (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3$, dan $V = V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3) = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ (associativiteit).
(ii) Als $V = V_1 \oplus V_2$, dan $V = V_1 \oplus V_2 = V_2 \oplus V_1$ (commutativiteit).

Propositie 2.4. *Zij V een vectorruimte en $V_1, \dots, V_n$ eindig dimensionale lineaire deelruimten van V zodanig dat $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$. Dan is V een eindig dimensionale vectorruimte. Stel verder dat voor elke i: β_i een basis is voor V_i, dan is $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ een basis voor V. Hieruit volgt dat $\dim(V) = \sum_{i=1}^n \dim(V_i)$.*

Propositie 2.5. *Zij $W_1, \dots, W_n$ vectorruimten over een lichaam K. Bekijk het Cartesisch product $W := W_1 \times \dots \times W_n$. De verzameling W met bewerkingen*

1. $(w_1, \dots, w_n) + (w'_1, \dots, w'_n) := (w_1 +_{W_1} w'_1, \dots, w_n +_{W_n} w'_n)$,
2. $\alpha(w_1, \dots, w_n) := (\alpha w_1, \dots, \alpha w_n)$,

voor elke $w_i, w'_i \in W_i, w, w' \in W$ en $\alpha \in K$,

is een vectorruimte over K.

Opmerking 2.6. Bekijk Z zoals gedefinieerd in Propositie 2.5.
De verzamelingen $W'_i := \{(0_{W_1}, \dots, 0_{W_{i-1}}, w_i, 0_{W_{i+1}}, \dots, 0_{W_n}) \ ; \ w_i \in W_i, \ 0_{W_j} \in W_j \ \forall j \neq i\}$ zijn lineaire deelruimten van Z. Verder is $Z = \sum_{i=1}^n W'_i$ en $W'_i \cap W'_j = \{0_Z\}$ wanneer $i \neq j$, dus $Z = W'_1 \oplus \dots \oplus W'_n$. Omdat voor elke $i : W_i \cong W'_i$ noemen we Z ook wel de *externe directe som* van $\{W_1, \dots, W_n\}$, geschreven als $Z = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$.

Definitie 2.7 (Externe directe som)**.** Zij $W_1, \dots, W_n$ vectorruimten over een lichaam k. Dan is de *externe directe som* van $W_1, \dots, W_n$ de vectorruimte $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ zoals gedefinieerd in Propositie 2.5 en Opmerking 2.6.

Propositie 2.8. *Zij $W_1, \dots, W_n$ eindig dimensionale vectorruimten over een lichaam K en zij $Z = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ (externe directe som). Dan is Z eindig dimensionaal en $\dim(Z) = \sum_{i=1}^n \dim(W_i)$.*

Definitie 2.9 (Directe som van inproductruimten)**.** Zij $W_1, \dots, W_n$ inproductruimten over een lichaam K, waar voor elke i: $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_i}$ het inproduct op W_i is. Dan kan een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ worden gedefinieerd als

$$\langle (w_1, \dots, w_n), (w'_1, \dots, w'_n) \rangle := \sum_{i=1}^n \langle w_i, w'_i \rangle_{W_i} \quad \forall w_i, w'_i \in W_i.$$

Met $W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ als directe som van inproductruimten bedoelen we de directe som als vectorruimten met bovenstaand inproduct.

Propositie 2.10. *Zij V een eindig dimensionale complexe inproductruimte en zij $f : V \to V$ een lineaire transformatie. Dan bestaat er een unieke lineaire transformatie $f^\diamond : V \to V$ zodat $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^\diamond(y)\rangle$ voor elke $x, y \in V$. Deze unieke lineaire transformatie $f^\diamond$ wordt de geadjungeerde van f genoemd.*

Definitie 2.11 (Geadjungeerde)**.** Zij V een eindig dimensionale complexe inproductruimte en zij $f : V \to V$ een lineaire transformatie. Dan wordt de unieke lineaire transformatie $f^\diamond : V \to V$, zodat $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^\diamond(y)\rangle$ voor elke $x, y \in V$, de *geadjungeerde* van f genoemd.

Definitie 2.12 (Isometrie)**.** Zij V, W inproductruimten. Een lineaire afbeelding $f : V \to W$ heet een *isometrie* wanneer: $\langle f(v_1), f(v_2)\rangle_W = \langle v_1, v_2\rangle_V \quad \forall v_1, v_2 \in V$.

Merk op dat de isometrie eigenschap garandeert dat de afbeelding injectief is. Vandaar de volgende definitie.

Definitie 2.13 (Unitaire afbeelding)**.** Een surjectieve isometrie wordt een *isometrisch isomorfisme* of een *unitaire afbeelding* genoemd. Twee inproductruimten heten *isometrisch isomorf* of *unitair* wanneer er een unitaire afbeelding tussen beiden bestaat.

Propositie 2.14. *Zij V een n-dimensionale complexe inproductruimte. Bekijk $\mathbb{C}^n$ met standaard inproduct. Dan zijn V en $\mathbb{C}^n$ isometrisch isomorf (unitair).*

Bewijs. Kies een basis voor $\mathbb{C}^n$ en een orthonormale basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ voor V. Definieer

$$\begin{array}{cccc} h: & \mathbb{C}^n & \to & V \\ & (z_1, \ldots, z_n) & \mapsto & z_1a_1 + \cdots + z_na_n. \end{array}$$

(a) Te bewijzen dat h een lineaire afbeelding tussen vectorruimten is.
Zij $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ willekeurig, dan:

1. $h(z+w) = (z_1+w_1)a_1+\cdots+(z_n+w_n)a_n = (z_1a_1+\cdots+z_na_n)+(w_1a_1+\cdots+w_na_n) = h(z) + h(w)$,
2. $h(\lambda z) = h(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \lambda z_1a_1 + \cdots + \lambda z_na_n = \lambda(z_1a_1 + \cdots + z_na_n) = \lambda h(z)$.

(b) Surjectiviteit. Zij $v \in V$, dan is v te schrijven als $v = z_1a_1 + \cdots + z_na_n$ voor bepaalde $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ en $h(z_1, \ldots, z_n) = v$.
(c) Injectiviteit. Stel $h(z) = h(w)$ met $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$.
Uit $z_1a_1 + \cdots + z_na_n = w_1a_1 + \cdots + w_na_n$ volgt: $(z_1 - w_1)a_1 + \cdots + (z_n - w_n)a_n = 0$. Omdat $\{a_1, \ldots, a_n\}$ een lineair onafhankelijk stelsel is, moet gelden: $z_i - w_i = 0\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Dus $z = w$.
(d) Te bewijzen dat h een isometrie tussen $\mathbb{C}^n$ en V is.

$$\begin{aligned}
\langle h(z), h(w))\rangle &= \langle z_1a_1 + \cdots + z_na_n, w_1a_1 + \cdots + w_na_n\rangle \\
&= \langle z_1a_1, w_1a_1 + \cdots + w_na_n\rangle + \cdots + \langle z_na_n, w_1a_1 + \cdots + w_na_n\rangle \\
&= \langle z_1a_1, w_1a_1\rangle + \langle z_1a_1, w_2a_2\rangle + \cdots + \langle z_1a_1, w_na_n\rangle + \cdots + \langle z_na_n, w_na_n\rangle \\
&= z_1\overline{w_1}\langle a_1, a_1\rangle + z_1\overline{w_2}\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + z_1\overline{w_n}\langle a_1, a_n\rangle + \cdots + z_n\overline{w_n}\langle a_n, a_n\rangle \\
&= z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n} \\
&= \langle z, w\rangle.
\end{aligned}$$

De op één na laatste gelijkheid volgt uit het gegeven dat $\{a_1, \ldots, a_n\}$ een orthonormale basis is. Dan geldt: $\langle a_i, a_j\rangle = 0$ als $i \neq j$, en $\langle a_i, a_j\rangle = 1$ als $i = j$. De laatste gelijkheid is het standaard inproduct op $\mathbb{C}^n$. □

3 Algebra's

Voor de onderwerpen 'Algebra's', 'Representatie theorie' en 'Quivers' is als leidraad *Introduction to representation theory* van P. Etingof [8] gebruikt. Het bewijs van de Dichtheidsstelling is gebaseerd op het bewijs vanaf pagina 13 uit *Lectures and problems in representation theory* van P. Etingof uit 2005 [9].

Definitie 3.1 (Algebra over een lichaam)**.** Een *algebra over een lichaam* K is een vectorruimte A over K, met een K-bilineaire vermenigvuldiging $A \times A \to A, (a,b) \mapsto a \cdot b$.
Met andere woorden: naast de voorwaarden voor een vectorruimte geldt ook

1. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a,b,c \in A$.
2. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a,b,c \in A$.
3. $(\lambda\gamma)(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot (\gamma b) \quad \forall \lambda, \gamma \in K \; \forall a,b \in A$.

Definitie 3.2 (Associatieve algebra)**.** Zij A een algebra over een lichaam K, met K-bilineaire vermenigvuldiging $A \times A \to A, (a,b) \mapsto a \cdot b$. A heet een *associatieve* algebra over K, wanneer de vermenigvuldiging ook voldoet aan: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in A$.

Definitie 3.3 (Unitale algebra)**.** Zij A een algebra over een lichaam K. Wanneer A een neutraal element bevat, dat wil zeggen een $1 \in A$ zodanig dat $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in A$, dan heet A een *unitale* associatieve algebra over K.

Opmerking 3.4. Wanneer een algebra A een neutraal element bevat, is deze uniek. Stel namelijk dat 1 en $1'$ beiden een neutraal element van A zijn, dan: $1 = 1 \cdot 1' = 1'$.

Opmerking 3.5. Een algebra over een lichaam K wordt ook wel een K-algebra genoemd. Wanneer $K = \mathbb{C}$, hebben we het over een complexe algebra.

Definitie 3.6 (Involutie)**.** Een *complexe* **-algebra* is een complexe algebra A met een (anti-lineaire) involutie $^* : A \to A$.

1. $a^{**} = a \quad \forall a \in A$.
2. $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^* \quad \forall a,b \in A$.
3. $(\lambda a + \gamma b)^* = \overline{\lambda} a^* + \overline{\gamma} b^* \quad \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{C} \; \forall a,b \in A$.

Opmerking 3.7. Als A een unitale *-algebra is, dan $1^* = 1$. Want $1^* a = (a^* 1)^* = a^{**}$ en $a 1^* = (1 a^*)^* = a^{**} = a$. Door de uniciteit van een multiplicatieve identiteit geldt $1 = 1^*$.

Voorbeeld 3.8 (Unitale associatieve complexe *-algebra)**.** Neem $K = \mathbb{C}$ en $n \in \mathbb{N}$. Bekijk $A = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (verzameling van $n \times n$ matrices over $\mathbb{C}$) met de gebruikelijke optelling en matrix vermenigvuldiging. Het neutrale element is de $n \times n$ identiteitsmatrix en de optelling en vermenigvuldiging voldoen aan de eisen van een unitale associatieve complexe algebra.
Definieer $^* : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ door: $S^* := (\overline{S})^T = \overline{S^T} \quad \forall S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, met S^Tde getransponeerde matrix van S en $\overline{S}$ de complex geconjugeerde matrix van S. Dan is * een involutie. Dus $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ met de gebruikelijke matrix vermenigvuldiging en optelling, samen met hierboven gedefinieerde involutie, is een eindig dimensionale unitale associatieve complexe *-algebra.

Definitie 3.9 (Deelalgebra)**.** Een deelalgebra van een unitale associatieve complexe *-algebra A is een lineaire deelruimte $S \subseteq A$ welke gesloten is onder de geïnduceerde vermenigvuldiging van vectoren en die het neutrale element t.o.v. de vermenigvuldiging bevat. Daarnaast moet ook nog gelden dat S gesloten is onder de geïnduceerde involutie van A.

Opmerking 3.10. In de rest van deze scriptie wordt met 'algebra' een 'eindig dimensionale unitale associatieve complexe *-algebra' bedoeld, tenzij anders aangegeven.

Definitie 3.11 (Directe som van algebra's)**.** Een directe som $A \oplus B$ van een algebra A met involutie ^{*_A} en een algebra B met involutie ^{*_B}, is de directe som als vectorruimten, met als vermenigvuldiging: $(a,b)(a',b') := (aa',bb') \quad \forall a,a' \in A, \ \forall b,b' \in B$. En involutie: $(a,b)^* := (a^{*_A}, b^{*_B}) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$.

Propositie 3.12. *Zij V een eindig dimensionale complexe inproductruimte.*
Dan is $\mathrm{End}(V) := \{f : V \to V \ ; \ f$ *lineaire afbeelding*$\}$, *met optelling en vermenigvuldiging gedefiniëerd als*

$$\begin{aligned} (f+g)(v) &:= f(v) + g(v) && f,g \in \mathrm{End}(V), \ v \in V, \\ (f \cdot g)(v) &:= (f \circ g)(v) = f(g(v)) && f,g \in \mathrm{End}(V), \ v \in V, \end{aligned}$$

een *-algebra.

Bewijs. (a) Het is gemakkelijk na te gaan dat $\mathrm{End}(V)$ een complexe vectorruimte is.
(b) Te bewijzen dat $\mathrm{End}(V)$ met deze optelling en vermenigvuldiging een algebra is.
Bewijs (b). Zij $f,g,h \in \mathrm{End}(V), \ v \in V$ en $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ willekeurig, dan

1. $((f+g)\cdot h)(v) = (f+g)(h(v)) = f(h(v)) + g(h(v)) = (f \cdot h)(v) + (g \cdot h)(v)$,
2. $(f \cdot (g+h))(v) = (f((g+h)(v)) = f(g(v)+h(v)) = (f \cdot g)(v) + (f \cdot h)(v)$,
3. $((\lambda\gamma)(f \cdot g))(v) = \lambda f(\gamma g(v)) = ((\lambda f) \cdot (\gamma g))(v)$.

De associativiteit van de vermenigvuldiging volgt uit de associativiteit van het samenstellen van lineaire functies. Het neutrale element t.o.v. de vermenigvuldiging is de identiteitsfunctie $\mathrm{id_V} : V \to V, v \mapsto v$.
(c) Te bewijzen dat $\mathrm{End}(V)$ een *-algebra is.
Bewijs (c). Definieer de afbeelding

$$\begin{array}{rccl} ^* : & \mathrm{End}(V) & \to & \mathrm{End}(V) \\ & f & \mapsto & f^\diamond \qquad \text{(geadjungeerde van } f\text{)}. \end{array}$$

Zij $f,g \in \mathrm{End}(V), \ v,w \in V$ en $\lambda,\gamma \in \mathbb{C}$ willekeurig, dan:

4. $\langle v, (f^{**})(w)\rangle = \langle f^*(v), w\rangle = \overline{\langle v, f^*(w)\rangle} = \overline{\langle f(v), w\rangle} = \overline{\overline{\langle v, f(w)\rangle}} = \langle v, f(w)\rangle$,
5. $\langle v, (f \cdot g)^*(w)\rangle = \langle f(g(v)), w\rangle = \langle g(v), f^*(w)\rangle = \langle v, g^*(f^*(w))\rangle = \langle v, (g^* \cdot f^*)(w)\rangle$,
6. $\langle v, (\lambda f + \gamma g)^*(w)\rangle = \langle (\lambda f + \gamma g)(v), w\rangle = \lambda\langle f(v), w\rangle + \gamma\langle g(v), w\rangle = \langle v, (\overline{\lambda} f^* + \overline{\gamma} g^*)(w)\rangle$.

Uit 4. volgt $\langle v, (f^{**})(w) - f(w)\rangle = \langle v, (f^{**} - f)(w)\rangle = 0 \quad \forall v, w \in V$.
Dan $(f^{**} - f)(w) = 0 \quad \forall w \in V$. Dus $f^{**} = f$.
Op analoge wijze ook te bewijzen: $(f \cdot g)^* = g^* \cdot f^*$ en $(\lambda f + \gamma g)^* = \overline{\lambda} f^* + \overline{\gamma} g^*$. □

Definitie 3.13 (Homomorfisme van algebra's)**.** Zij A, B algebra's. Een *homomorfisme (van algebra's)* van A naar B is een lineaire afbeelding $f : A \to B$ zodanig dat:

1. $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$ voor elke $a_1, a_2 \in A$,
2. $f(1_A) = 1_B$,
3. $f(a^*) = f(a)^*$ voor elke $a \in A$.

Definitie 3.14 (Isomorfisme van algebra's)**.** Een *isomorfisme van algebra's* is een bijectief homomorfisme van algebra's.

Propositie 3.15. *Zij V een n-dimensionale complexe inproductruimte. Bekijk $\mathbb{C}^n$ met standaard inproduct. Dan* $\operatorname{End}(V) \cong \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ *(als algebra's).*

Bewijs. Uit Propositie 2.14 volgt dat V en $\mathbb{C}^n$ unitair zijn. Er bestaat dus een unitaire afbeelding $h : \mathbb{C}^n \to V$. Merk op $h^{-1} = h^*$ (geadjungeerde) omdat h unitair. Definieer

$$\begin{array}{rccc} l: & \operatorname{End}(\mathbb{C}^n) & \to & \operatorname{End}(V) \\ & f & \mapsto & h \circ f \circ h^*. \end{array}$$

Te bewijzen dat l een isomorfisme is.

1. Gemakkelijk na te gaan: l behoudt optelling, vermenigvuldiging en scalaire vermenigvuldiging.
2. $l(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = h \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n} \circ h^* = \mathrm{id}_V$.
3. Behoud van involutie. Stel $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$, dan $l(f)^* = (h \circ f \circ h^*)^* = (h^{**} \circ f^* \circ h^*) = l(f^*)$.
4. Inverse: $l^{-1} : \operatorname{End}(V) \to \operatorname{End}(\mathbb{C}^n),\ g \mapsto h^* \circ g \circ h$.

Dus $\operatorname{End}(V) \cong \operatorname{End}(\mathbb{C}^n$. □

Definitie 3.16 (Ideaal van een algebra)**.** Een *links ideaal* van een algebra A is een lineaire deelruimte $I \subseteq A$ zodanig dat $aI := \{ai \mid a \in A, i \in I\} \subseteq I\ \forall a \in A$.
Een *rechts ideaal* van een algebra A is een lineaire deelruimte $I \subseteq A$ zodanig dat $Ia \subseteq I\ \forall a \in A$.
Een *tweezijdig ideaal* van een algebra A is een lineaire deelruimte $I \subseteq A$ die zowel links als rechts ideaal is.

Definitie 3.17 (Enkelvoudige/simpele algebra)**.** Elke algebra A heeft twee idealen, namelijk $\{0\}$ en A zelf. Een algebra A heet *enkelvoudig (simpel)* wanneer $\{0\}$ en A zijn enige tweezijdige idealen zijn.

Definitie 3.18 (Gegenereerd ideaal)**.** Zij S een deelverzameling van A. Het tweezijdige ideaal opgespannen door S, genoteerd $\langle S \rangle$, is het lineaire opspansel van alle elementen uit $\{asb\ ;\ a, b \in A, s \in S\}$. Dit opspansel wordt ook wel genoteerd als $\operatorname{span}\{asb\}$.
Net zo zijn te definiëren: $\langle S \rangle_l := \operatorname{span}\{as\},\ \langle S \rangle_r := \operatorname{span}\{sb\}$.

Opmerking 3.19. Zij A een algebra en $I \subseteq A$ een tweezijdig ideaal van A. Dan is A/I de verzameling van nevenklassen van I, met gebruikelijke optelling van nevenklassen. Zij $\pi : A \to A/I$ de quotiëntafbeelding. Definieer vermenigvuldiging op A/I door $\pi(a) \cdot \pi(b) := \pi(ab)\ \forall a, b \in A$.
Te bewijzen dat deze vermenigvuldiging goed gedefinieerd is.
Bewijs. Stel $\pi(a) = \pi(a')$, dan

$$\pi(a'b) = \pi(ab + (a' - a)b) = \pi(ab) + \pi((a' - a)b) = \pi(ab),$$

waar de laatste gelijkheid volgt uit $(a' - a)b \in Ib \subseteq I$, dus $\pi((a' - a)b) = 0$. Als $\pi(b) = \pi(b')$, dan

$$\pi(ab') = \pi(ab + a(b' - b)) = \pi(ab) + \pi(a(b' - b)) = \pi(ab),$$

waar de laatste gelijkheid volgt uit $a(b' - b) \in aI \subseteq I$, dus $\pi(a(b' - b)) = 0$. Dus A/I is een algebra.

Definitie 3.20 (Quotiënt algebra)**.** Zij A een algebra en $I \subseteq A$ een tweezijdig ideaal van A. Dan is A/I, zoals gedefinieerd in Opmerking 3.19, de *quotiënt algebra van A modulo I*.

4 Representatie theorie

Definitie 4.1 (Representatie van een algebra)**.** Een *representatie* van een algebra A (Ook wel linker A-module genoemd) is een eindig dimensionale complexe vectorruimte V, samen met een homomorfisme van algebra's $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$. Waar $\mathrm{End}(V) := \{f : V \to V \mid f \text{ lineaire transformatie}\}$. Notatie: dit kan worden genoteerd als (ρ, V), maar vaak wordt het homomorfisme ρ weggelaten.

Een rechter A-module is een inproductruimte V met een anti-homomorfisme $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$. Dat wil zeggen: $\rho(ab) = \rho(b)\rho(a) \quad \forall a, b \in A$ in plaats van $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) \quad \forall a, b \in A$.

Notatie: zij (ρ, V) een representatie van een algebra A. Vaak wordt av geschreven voor $\rho(a)v$ met $a \in A,\ v \in \mathbb{C}$. Net zo is va te schrijven voor $v\rho(a)$ wanneer het om een rechter A-module gaat.

Voorbeeld 4.2.

1. Zij $V = 0$, dan is het homomorfisme de nul-afbeelding
2. Zij $A = K$ (een lichaam K), dan is een representatie V van A een vectorruimte over K
3. Zij $A = \mathbb{C}[x]$, algebra van polynomen in één variabele. Zij V een eindig dimensionale complexe vectorruimte, en zij $T \in \mathrm{End}(V)$. Definiëer een representatie (ρ, V) van $\mathbb{C}[x]$ door: $\rho(f) := f(T) \quad \forall f \in \mathbb{C}[x]$. Dan is $\mathrm{Ker}(\rho) := \{f \in \mathbb{C}[x] \mid \rho(f) = f(T) = 0\}$ het ideaal voortgebracht door de minimum veelterm van T.[10]

Opmerking 4.3. Wanneer A een *-algebra is, gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V, geschreven (ρ, V), dan is $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ een homomorfisme van *-algebra's. Per definitie van een homomorfisme van *-algebra's geldt dan: $\rho(a^*) = \rho(a)^*\ \forall a \in A$. Op $\mathrm{End}(V)$ werkt als involutie het nemen van de geadjungeerde.

Vanaf nu wordt in alle gevallen met 'algebra' A bedoeld 'eindig dimensionale unitale associatieve complexe algebra' A. Wanneer A op een complexe inproductruimte wordt gerepresenteerd, nemen we daarnaast ook aan dat A een *-algebra is (en dus bovenstaande eigenschap voor de representatie geldt).

Definitie 4.4 (Getrouwe representatie)**.** Een representatie van een algebra A heet *getrouw* wanneer het bijhorend homomorfisme injectief is.

Opmerking 4.5. Een homomorfisme ρ is injectief d.e.s.d.a. $\mathrm{Ker}(f) = 0$. Stel (ρ, V) is een getrouwe representatie van een algebra A, dan geldt $A \cong \rho(A) \subseteq \mathrm{End}(V)$ (als isomorfisme tussen algebra's). We zeggen dan dat A ingebed in $\mathrm{End}(V)$ ligt en kunnen A identificeren met zijn beeld $\rho(A)$.

Definitie 4.6 (Deelrepresentatie)**.** Zij (ρ, V) een representatie van een algebra A. Dan is een *deelrepresentatie* van V een lineaire deelruimte $S \subseteq V$, zodanig dat voor elke $a \in A$; S invariant is onder de operatie $\rho(a) : V \to V$.
Wanneer V een inproductruimte is, dan werkt dit inproduct ook op S. Dan moet gelden voor elke $a \in A$: S is invariant is onder $\rho(a^*) = \rho(a)^* : V \to V$.

Opmerking 4.7. Zij (ρ, V) een representatie van een algebra A en $W \subseteq V$ een deelrepresentatie van (ρ, V). Dan kunnen we op een vanzelfsprekende wijze een representatie (ρ', W) van algebra A maken. Omdat W invariant is onder $\rho(a)\ \forall a \in A$ geldt: $\rho(a)(W) \subseteq W\ \forall a \in A$. Definieer $\rho_W : A \to \mathrm{End}(W)$ door $\rho_W(a) := \rho(a)|_W$ voor elke $a \in A$.

Opmerking 4.8. (i) Zij I een links ideaal van een algebra A. Bekijk de *standaard representatie* van A: (ρ, A) met $\rho(a)(b) := ab\ \forall a, b \in A$. Dan is (ρ_I, I) een deelrepresentatie van (ρ, A). Andersom, wanneer (ρ_I, I) een deelrepresentatie is van (ρ, A), dan is I een links ideaal van A.

(ii) Stel (ρ_V, V) is een representatie van A en $W \subseteq V$ is een deelrepresentatie van V. Zij $\pi : V \to V/W$ de quotiëntafbeelding. Definieer

$$\begin{array}{rccc} \rho_{V/W}: & A & \to & \mathrm{End}(V/W) \\ & a & \mapsto & (\pi(x) \mapsto \pi(\rho_V(a)x)). \end{array}$$

Dan is $(\rho_{V/W}, V/W)$ een representatie van A.

(iii) Stel I is een linksideaal van A, dan volgt uit (i) en (ii) dat A/I een representatie is van A.

Definitie 4.9 (Irreducibele representatie)**.** Een niet-nul representatie V van een algebra A heet *irreducibel (simple)* wanneer zijn enige deelrepresentaties 0 en V zijn.

Definitie 4.10 (Homomorfisme van representaties)**.** Zij $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ representaties van een algebra A. Een homomorfisme van representaties (of intertwiner) van (ρ_1, V_1) naar (ρ_2, V_2) is een lineaire afbeelding $\phi : V_1 \to V_2$ welke commuteert met de actie van A.
Dat wil zeggen: $\phi(\rho_1(a)(v)) = \rho_2(a)(\phi(v)) \quad \forall a \in A, \forall v \in V_1$.
Wanneer V_1 en V_2 inproductruimten zijn, eisen we dat ϕ een isometrie is.

Definitie 4.11 (Isomorfisme van representaties)**.** Een homomorfisme $\phi : V_1 \to V_2$ van twee representaties heet een *isomorfisme van representaties* wanneer het een isomorfisme tussen de desbetreffende vectorruimten is. Wanneer V_1 en V_2 inproductruimten zijn, dan is ϕ een unitaire afbeelding is.

Merk op dat wanneer $\phi : V_1 \to V_2$ een isomorfisme van de representaties is, dat dan $\phi^{-1} : V_2 \to V_1$ ook een isomorfisme van deze representaties is.

Opmerking 4.12. Zij $(\rho_1, V_1), (\rho_2, V_2)$ representaties van een algebra A.
De ruimte van alle homomorfismen van representaties $V_1 \to V_2$ wordt genoteerd als $\mathrm{Hom}_A(V_1, V_2)$.
De ruimte $\mathrm{End}_A(V)$ van alle endomorfismen van representaties $V \to V$ is een algebra met optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd als

$$\begin{aligned} (\phi + \gamma)(v) &:= \phi(v) + \gamma(v) & \phi, \gamma \in \mathrm{End}_A(V),\ v \in V, \\ (\phi \cdot \gamma)(v) &:= (\phi \circ \gamma)(v) = \phi(\gamma(v)) & \phi, \gamma \in \mathrm{End}_A(V),\ v \in V. \end{aligned}$$

Definitie 4.13 (Directe som van representaties)**.** Zij $(\rho_1, V_1), (\rho_2, W_2)$ representaties van een algebra A. Dan is $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ een representatie van A door

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(a)(v_1, v_2) := (\rho_1(a)(v_1), \rho_2(a)(v_2)) \ \ \forall a \in A,\ \forall (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2.$$

Definitie 4.14 (Onontbindbare representatie)**.** Een niet-nul representatie V van een algebra A heet *onontbindbaar (indecomposable)* wanneer hij niet isomorf is aan een directe som van twee niet-nul representaties.

Merk op dat irreducibiliteit onontbindbaarheid impliceert maar dit hoeft niet andersom te gelden. Zie voorbeeld 4.15.

Voorbeeld 4.15. Zij $A = \mathbb{C}[x]$ algebra, gerepresenteerd op $V = \mathbb{C}^2$, geschreven (ρ, V), waar ρ gegeven is door: $\rho(x) := \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$. Hiermee ligt ρ vast. Deze representatie is onontbindbaar, maar niet irreducibel, want $0 \neq \{(y,0) \mid y \in \mathbb{C}\} \subsetneq V$ is een deelrepresentatie van V.

Definitie 4.16 (Halfenkelvoudige representatie)**.** Een *halfenkelvoudige (semisimple)* representatie van een algebra A is een directe som van irreducibele representaties.

Propositie 4.17 (Lemma van Schur)**.** *Zij (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) representaties van een algebra A. Zij verder $\phi : V_1 \to V_2$ een niet-nul homomorfisme van representaties, dan:*
(i) Als V_1 irreducibel, dan is ϕ injectief.
(ii) Als V_2 irreducibel, dan is ϕ surjectief.
Gevolg: wanneer zowel V_1 als V_2 irreducibel zijn, is ϕ een isomorfisme van representaties.

Bewijs. (i) Bekijk $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq V_1$. Omdat ϕ niet het nul-homomorfisme is, geldt $\mathrm{Ker}(\phi) \subsetneq V_1$. $\mathrm{Ker}(\phi)$ is een lineaire deelruimte van V_1 en invariant onder $\rho_1(a)$ voor elke $a \in A$, want:

$$\phi(\rho_1(a)(k)) = \rho_2(a)(\phi(k)) = \rho_2(0) = 0 \quad \forall k \in \mathrm{Ker}(\phi), \forall a \in A.$$

Dan is $(\rho_{\mathrm{Ker}(\phi)}, \mathrm{Ker}(\phi))$ met $\rho_{\mathrm{Ker}(\phi)}(a) := \rho_1(a)|_{\mathrm{Ker}(\phi)}$ $\forall a \in A$, een deelrepresentatie van (ρ_1, V_1). Omdat (ρ_1, V_1) irreducibel is, volgt: $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$. Dus ϕ is injectief.

(ii) Bekijk $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq V_2$. Omdat ϕ niet het nul-homomorfisme is, geldt $\mathrm{Im}(\phi) \neq 0$. $\mathrm{Im}(\phi)$ is een lineaire deelruimte van V_2 welke invariant is onder $\rho_2(a)$ $\forall a \in A$.
Dan is $(\rho_{\mathrm{Im}(\phi)}, \mathrm{Im}(\phi))$ met $\rho_{\mathrm{Im}(\phi)}(a) := \rho_2(a)|_{\mathrm{Im}(\phi)}$ $\forall a \in A$, een deelrepresentatie van (ρ_2, V_2). Omdat (ρ_2, V_2) irreducibel is, volgt: $\mathrm{Im}(\phi) = V_2$. Dus ϕ is surjectief. ☐

Gevolg 4.18. *Zij (ρ, V) een n-dimensionale ($n \in \mathbb{N}$) representatie van een algebra A. Zij verder $\phi : V \to V$ een homomorfisme van representaties. Dan $\phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ voor een $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Bewijs. Kies een basis voor V. Schrijf ϕ als $n \times n$-matrix D ten opzichte van deze basis. Bekijk het karakteristieke polynoom $P_\phi(\gamma) := \det(D - \gamma \cdot \mathrm{I}_n)$ van ϕ. Omdat $\mathbb{C}$ een algebraïsch gesloten lichaam is, heeft $P_\phi(\gamma)$ een nulpunt (eigenwaarde) $\lambda \in \mathbb{C}$. Definieer

$$\begin{array}{rccc} g: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & (\phi - \lambda \cdot \mathrm{Id})(v). \end{array}$$

Dan is g een lineaire transformatie en

$$\rho(a)(g(v)) = \rho(a)(\phi(v)) - \rho(a)(\lambda v) = \phi(\rho(a)(v)) - \lambda\rho(a)(v) = g(\rho(a)(v)) \ \forall a \in A, \ \forall v \in V.$$

Dus g is een homomorfisme van representaties. Omdat $\det(D - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = 0$, is g niet inverteerbaar en dus geen isomorfisme. Uit het Lemma van Schur volgt dat g de nul afbeelding moet zijn. Dus $\phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$. ☐

Opmerking 4.19. Voor representaties op complexe inproductruimten geldt het Lemma van Schur als volgt:
(a) Zij A een algebra, gerepresenteerd op twee complexe inproductruimten V_1, V_2, geschreven (ρ_1, V_1) respectievelijk (ρ_2, V_2). En zij $\phi : V_1 \to V_2$ homomorfisme van representaties, dan ϕ per definitie een isometrie en dus injectief. Stel V_2 irreducibel, dan is ϕ unitair.
(b) Zij A een algebra, gerepresenteerd op een n-dimensionale complexe inproductruimte V ($n \in \mathbb{N}$), geschreven (ρ, V). Zij verder $\phi : V \to V$ een homomorfisme van representaties. Dan is ϕ unitair en $\phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$ voor een $\lambda \in \mathbb{C}$ op de eenheidscirkel.

Lemma 4.20. *Elke niet-nul eindig dimensionale representatie van een algebra A heeft een irreducibele deelrepresentatie.*

Bewijs. Zij $V \neq 0$ een n-dimensionale representatie van A ($n \in \mathbb{N}$). Als V irreducibel is zijn we klaar. Stel V niet irreducibel, dan bestaat er een deelrepresentatie $0 \subsetneq V_1 \subsetneq V$, waarvoor $0 \leq \dim(V_1) < n$. Als V_1 irreducibel is, dan zijn we klaar en anders bestaat er een $0 \subsetneq V_2 \subsetneq V_1 \subsetneq V$ deelrepresentatie van V_1 waarvoor $0 \leq \dim(V_2) < \dim(V_1) < n$, et cetera. Omdat V eindig dimensionaal is, is er een V_p waarvoor er geen deelrepresentatie $0 \subsetneq W \subsetneq V_p$ is met $0 \leq \dim(W) < \dim(V_p)$. Dus V_p is irreducibel. □

Propositie 4.21. *Zij A een algebra, gerepresenteerd op een complexe vectorruimte V, geschreven (ρ, V). $\mathrm{End}_A(V)$ is de algebra van alle homomorfismen van representaties $V \to V$. Schrijf A^{op} voor de algebra A met omgekeerde vermenigvuldiging. Schrijf (ρ, A) voor de standaardrepresentatie van A. Dan $\mathrm{End}_A(A) \cong A^{op}$ (als algebra's).*

Bewijs.

Zij de vermenigvuldiging op A :	$A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a \cdot b,$
dan is de vermenigvuldiging op A^{op} gedefinieerd als :	$A \times A \to A,\ (a,b) \mapsto a \lozenge b := b \cdot a.$

Stel $f \in \mathrm{End}_A(A)$ en $a, b \in A$ willekeurig, dan $f(a \cdot b) = f(\rho(a)(b)) = \rho(a)(f(b)) = a \cdot f(b)$. Dus in het bijzonder geldt $f(a) = f(a \cdot 1) = a \cdot f(1) \ \ \forall a \in A$. Dus elke $f \in \mathrm{End}_A(A)$ wordt gedefinieerd door $f(1)$.
Definieer de functie

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathrm{End}_A(A) & \to & A^{\mathrm{op}} \\ & f & \mapsto & f(1). \end{array}$$

Te bewijzen dat ϕ een homomorfisme van algebra's is.
Bewijs. Het is duidelijk dat ϕ goed gedefinieerd is. Zij $f, g \in \mathrm{End}_A(A)$ en $\lambda \in \mathbb{C}$ willekeurig, dan:

1. $\phi(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_A(1) = 1 \in A^{\mathrm{op}}$,
2. $\phi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \phi(f) + \phi(g)$,
3. $\phi(f \cdot g) = (f \cdot g)(1) = f(g(1)) = g(1) \cdot f(1) = f(1) \lozenge g(1) = \phi(f) \lozenge \phi(g)$,
4. $\phi(\lambda a) = (\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda \phi(f)$.

Dus ϕ is een homomorfisme van algebra's.

Te bewijzen dat ϕ een bijectie is.
Bewijs. (injectiviteit) Stel $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$, dan $f(1) = \phi(f) = 0$. Dus f is de nul-afbeelding en $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$.
(surjectiviteit) Stel $b \in A^{\mathrm{op}}$. Definieer $g_b : A \to A,\ a \mapsto a \cdot b$. Dan $g_b \in \mathrm{End}_A(A)$, want g_b is een lineaire transformatie van de vectorruimte A, en

$$g_b(\rho(a)(c)) = g_b(a \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (c \cdot b) = \rho(a)(g_c(c)),\ \forall a, c \in A.$$

Dan $\phi(g_b) = g_b(1) = b$. Dus ϕ is surjectief en bewezen dat ϕ een isomorfisme van algebra's is. □

Propositie 4.22. *Zij A een algebra welke gerepresenteerd is op een n-dimensionale complexe inproductruimte V, geschreven (ρ, V). Zij verder (ρ_W, W), met $\rho_W(a) := \rho(a)|_W \ \forall a \in A$, een deelrepresentatie van (ρ, V). Dan bestaat er een complementaire invariante lineaire deelruimte $U \subseteq V$ zodanig dat $V = W \oplus U$ (orthogonale directe som). Verder geldt dan ook dat (ρ_U, U) een deelrepresentatie van (ρ, V) is.*

Bewijs. Zij (ρ_W, W) een deelrepresentatie van (ρ, V). Dan is W een lineaire deelruimte van V. Zij $\{r_1, \cdots, r_m\}$ een basis voor W. Breid deze uit met vectoren $s_1, \ldots, s_{n-m}$ tot een basis $\{r_1, \cdots, r_m, s_1, \ldots, s_{n-m}\}$ voor V. Definieer U als het lineaire opspansel van de vectoren $s_1, \ldots, s_{n-m}$. Stel $v \in V$, dan is v uniek te schrijven als $v = (\lambda_1 r_1 + \cdots \lambda_m r_m) + (\lambda_{m+1} s_1 + \cdots \lambda_n s_{n-m})$ voor bepaalde $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Merk op dat $(\lambda_1 r_1 + \cdots \lambda_m r_m) \in W$ en $(\lambda_{m+1} s_1 + \cdots \lambda_n s_{n-m}) \in U$, dus is v te schrijven als $v = w + u$ voor bepaalde $w \in W$, $u \in U$. Dus $V = W + U$. Stel $w \in W$ en $u \in U$, dan $\langle u, w \rangle = 0$, want w is een lineaire combinatie van de basisvectoren $r_1, \cdots, r_m$, welke allen loodrecht staan op de basisvectoren $s_1, \ldots, s_{n-m}$, waarvan u een lineaire combinatie is. Dus $W \cap U = 0$ en $V = W \oplus U$ (orthogonale directe som). Merk nog op dat $U = W^\perp := \{v \in V \ ; \ \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$, het orthogonale complement van W in V. Dus $V = W \oplus W^\perp$.

Te bewijzen: $\rho(a)(U) \subseteq U \ \forall a \in A$.

Bewijs. Zij $a \in A$ willekeurig en vast. Zij $u \in U$ willekeurig. A is een *-algebra, dus $a^* \in A$. Bekijk $\rho(a)^* = \rho(a^*) \in \mathrm{End}(V)$. Daarvoor geldt: $\langle \rho(a)(u), w \rangle = \langle u, \rho(a)^*(w) \rangle = 0 \ \forall w \in W$. De tweede gelijkheid volgt uit het gegeven dat W gesloten is onder $\rho(a)$ voor elke $a \in A$, en dat $W \oplus U$ een orthogonale directe som is. Omdat w willekeurig was, volgt dat $\langle \rho(a)(u), w \rangle = 0 \ \forall w \in W$. Dus $\rho(a)(u) \in U$. De elementen $u \in U$ en $a \in A$ waren willekeurig, dus $\rho(a)(U) \subseteq U \ \forall a \in A$.

Wanneer we $\rho_U : U \to U$ met $\rho_U(a) := \rho(a)|_U \ \forall a \in A$ bekijken, dan is (ρ_U, U) een deelrepresentatie van (ρ, V). □

Opmerking 4.23. Zij A een algebra, gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V. Volgens Lemma 4.20 bevat V een irreducibele deelrepresentatie V_1. Dan volgens Propositie 4.22 is V te schrijven als $V = V_1 \oplus W_1$ (orthogonale directe som van V_1 en zijn orthogonale complement W_1 in V). Dan, volgens dezelfde redenering, bevat W_1 een irreducibele deelrepresentatie $V_2 \subseteq W_1$ en is W_1 te schrijven als $W_1 = V_2 \oplus W_2$, orthogonale directe som van V_2 en zijn orthogonale complement W_2 in W_1. Merk op dat V_1, V_2, W_2 paarsgewijs orthogonale deelrepresentaties van V zijn en $V = V_1 \oplus (V_2 \oplus W_2) = V_1 \oplus V_2 \oplus W_2$. Deze opdeling is te herhalen. Omdat V eindig dimensionaal is, is er een $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, orthogonale directe som van irreducibele deelrepresentaties van V.

Propositie 4.24. *Zij A een algebra, gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V, genoteerd (ρ, V). Stel verder dat $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ en $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$, beiden een orthogonale directe som van irreducibele representaties van A. Dan $k = l$ en $W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$ is een permutatie van $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.*

Bewijs. Bekijk $V_1 \subseteq V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$. (Merk op dat $V_1 \neq 0$ omdat deze irreducibel is.) Dan is er een W_{j_1} met $j_1 \in \{1, \ldots, l\}$ zodanig dat $V_1 \cap W_{j_1} \neq 0$. Omdat W_{j_1} irreducibel is, geldt $V_1 = W_{j_1}$. Dan $V_2 \oplus \cdots \oplus V_k = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{j_1 - 1} \oplus W_{j_1 + 1} \oplus \cdots \oplus W_l$. Op dezelfde wijze is er voor V_2 een W_{j_2} met $j_2 \in \{1, \cdots, l\} \setminus \{j_1\}$ zodanig dat $V_2 = W_{j_2}$. Dit is te herhalen voor V_3, V_4, et cetera. Dit stopt op een gegeven moment omdat k en l eindig zijn. Dan zijn er drie mogelijkheden:

(i) Er is geen V_i meer over, maar nog wel een W_j.

(ii) Er is nog wel een V_i over, maar geen W_j.

(iii) Zowel de V_i's als de W_j's zijn tegelijk op.

Als (i), dan $W_j = 0$, tegenspraak. Net zo een tegenspraak voor (ii). Dus geldt (iii), dan $k = l$ en $W_1 \oplus \cdots \oplus W_l$ is een permutatie van $V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$. □

Gevolg 4.25. *Uit Opmerking 4.23 en Propositie 4.24 volgt dat, wanneer een algebra A gerepresenteerd is op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V, deze V uniek te schrijven is als orthogonale directe som van irreducibele deelrepresentaties $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, op permutatie van de volgorde na.*

Propositie 4.26. *Zij* (ρ, V) *een* n*-dimensionale irreducibele representatie van een algebra* A*. Bekijk de representaties* $(\gamma, \mathrm{End}(V))$*, met* $\gamma(a)(f) := \rho(a) \cdot f \ \forall a \in A,\ \forall f \in \mathrm{End}(V)$ *en* (β, nV)*, met* $nV := \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{n}$ *en* $\beta(a)(v_1, \ldots, v_n) := (\rho(a)(v_1), \ldots, \rho(a)(v_n)) \ \forall a \in A,\ \forall v_i \in V$*. Dan* $\mathrm{End}(V) \cong nV$*.*

Bewijs. Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een basis voor V. Definieer

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathrm{End}(V) & \to & nV \\ & f & \mapsto & (f(v_1), \ldots, f(v_n)). \end{array}$$

Bewering: ϕ is een isomorfisme van representaties.
Bewijs. Het is duidelijk dat ϕ een lineaire afbeelding is. Stel $x \in \mathrm{End}(V)$ en $a \in A$ willekeurig, dan

$$\phi(\gamma(a)(x)) = ((\rho(a) \cdot x)(v_1'), \ldots, (\rho(a) \cdot x)(v_n')) = (\rho(a)(x(v_1')), \ldots, \rho(a)(x(v_n'))) = \beta(a)(\phi(x)).$$

Dus ϕ is een homomorfisme van representaties.
Stel $f \in \mathrm{Ker}(\phi)$, dan $\phi(f) = (f(v_1'), \ldots, f(v_n')) = (0, \ldots, 0) \in nV$. Dus $f(v_i') = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Dus f is de nul-afbeelding en ϕ is injectief. Omdat $\dim(\mathrm{End}(V)) = n^2 = \dim(nV)$ is ϕ een isomorfisme. □

Propositie 4.27. *Zij* A *een algebra, gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte* V*, geschreven* (ρ, V)*, en zij* $V_1, \ldots, V_n$ *irreducibele deelrepresentatie van* V *zodanig dat* $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ *(bestaan volgens Propositie 4.22). Stel verder dat* $\gamma : V_i \to V_j$ *een isomorfisme van representaties* V_i *en* V_j *uit* $V_1, \ldots, V_n$ *is.*
Dan is $V' := V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_{j-1} \oplus 2V_j \oplus V_{j+1} \oplus \cdots V_n$*, waar* $2V_j = V_j \oplus V_j$*, een representatie van* A *en* $V \cong V'$ *(als representaties).*

Bewijs. V' een representatie van A omdat het een directe som van representaties van A is. Definieer

$$\begin{array}{rccc} f: & V & \to & V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1} \oplus V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_{j-1} \oplus 2V_j \oplus V_{j+1} \oplus \cdots V_n \\ & (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_j, \gamma(v_i), v_{j+1}, \ldots, v_n). \end{array}$$

De afbeelding f is een isomorfisme van representaties omdat het een samenstelling is van isomorfisme

$$\begin{array}{rccc} \gamma': & V & \to & V_1 \oplus \cdots \oplus V_{i-1} \oplus V_j \oplus V_{i+1} \oplus \cdots \oplus V_n \\ & (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & (v_1, \ldots, v_{i-1}, \gamma(v_i), v_{i+1} \ldots, v_n). \end{array}$$

en van een permutatie van de volgorde van de directe som. Dus $V \cong V'$. □

Opmerking 4.28. Bovenstaande constructie van het 'samen nemen van isomorfe irreducibele deelrepresentaties' is achter elkaar toe te passen (eindig vaak, want V is eindig dimensionaal) totdat $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \cong \oplus_{k=1}^r m_k V_k'$ voor bepaalde $V_k' \in \{V_1, \ldots, V_n\}$, waar $r \leq n$, $\sum_{k=1}^r m_k = n$, $m_k V_k' = \underbrace{V_k' \oplus \cdots \oplus V_k'}_{m_k}$ en $V_k' \ncong V_l'$ als $k \neq l$ (als representaties van A). Stel $u : V \xrightarrow{\cong} \oplus_{k=1}^r m_k V_k'$ is het isomorfisme, dan wordt onder u een V_i uit $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ afgebeeld op een V_{kl}' uit $\oplus_{k=1}^r m_k V_k'$ (waar V_{kl}' de l-de V_k' uit $m_k V_k'$ is). Dan is $\psi := p_{kl} \circ u|_{V_i} : V_i \to V_{kl}'$, waar p_{kl} projectie op V_{kl}, een isomorfisme van deze representaties $(\rho_i, V_i), (\rho_k', V_{kl}')$ en geldt $\rho_k'(a) = \psi \rho_i(a) \psi^* \ \forall a \in A$.

Propositie 4.29. *Zij A een algebra, gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V, geschreven (ρ, V), en zij $V_1, \dots, V_n$ irreducibele deelrepresentatie van V zodanig dat $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Dan zijn er $V'_1, \dots, V'_r \in \{V_1, \dots, V_n\}$ zodanig dat $V \cong \oplus_{i=1}^r m_i V'_i$ (zie bovenstaande opmerking).*
Stel dat er ook $W_1, \dots, W_p$ eindig veel paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele representaties van A zijn zodanig dat $V \cong \oplus_{j=1}^s n_j W_j$.
Dan $r = s$ en voor elke $i \in \{1, \dots, r\}$ is er een unieke $j_i \in \{1, \dots, s\}$ zodanig dat $m_i = n_{j_i}$ en $V'_i \cong W_{j_i}$.

Bewijs. Zij $\phi : \oplus_{i=1}^r m_i V'_i \to \oplus_{j=1}^s n_j W_j$ een isomorfisme van representaties (bestaat want $\oplus_{i=1}^r m_i V'_i \cong V \cong \oplus_{j=1}^s n_j W_j$). Zij $i \in \{1, \dots, r\}$ willekeurig en bekijk V'_i. Dan $\phi(V'_i) \cap W_j \neq 0$ voor een $W_j \in \{W_1, \dots, W_s\}$. Omdat W_j irreducibel is moet gelden $\phi(V'_i) = W_j$ en dus $V'_i \cong W_j$. Het kan niet zijn dat ook $\phi(V'_i) \cap W_l \neq 0$ voor een $l \neq j$, want dan $W_j \cong W_l$ en die waren per aanname niet isomorf.
Dus W_j is uniek voor V'_i en omdat V'_i isomorf is aan m_i representaties in $\oplus_{i=1}^r m_i V'_i$ en W_{j_i} aan n_{j_i} representaties in $\oplus_{j=1}^s n_j W_j$ moet gelden $m_i = n_j$. Dus voor elke $i \in \{1, \dots, r\}$ is er een unieke $j_i \in \{1, \dots, s\}$ zodanig dat $m_i = n_{j_i}$ en $V'_i \cong W_{j_i}$. Dus $r \leq s$. Andersom is net zo te bewijzen dat voor elke $k \in \{1, \dots, s\}$ is er een unieke $i_k \in \{1, \dots, r\}$ zodanig dat $m_{i_k} = n_k$ en $V'_{i_k} \cong W$. Dus $s = r$. □

Gevolg 4.30. *Zij A een algebra, gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V, dan is V uniek te schrijven als (isomorf aan) $V \cong \oplus_{i=1}^r m_i V_i$ (voor bepaalde paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele representaties $V_1, \dots, V_r$ van V) op permutatie van de volgorde $(1, \dots, r)$ van de directe som na, en op het vervangen van één of meerdere representaties V_i door isomorfe representaties na.*

Opmerking 4.31. Zij A een algebra, getrouw gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V, geschreven (ρ, V), en zij $V_1, \dots, V_n$ irreducibele deelrepresentatie van V zodanig dat $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Dan zijn er $V'_1, \dots, V'_r \in \{V_1, \dots, V_n\}$ zodanig dat $V \cong \oplus_{j=1}^r m_j V'_j$.

Bewering 1. De representatie

$$\begin{array}{rccc} \rho' : & A & \to & \mathrm{End}(\oplus_{j=1}^r m_j V'_j) \\ & a & \mapsto & (\underbrace{\rho'_1(a), \dots, \rho'_1(a)}_{m_1}, \dots, \underbrace{\rho'_r(a), \dots, \rho'_r(a)}_{m_r}), \end{array}$$

waar $\rho'_i := \rho|_{V'_i}$ voor elke i, is injectief.

Bewijs. Per aanname is $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ injectief. Stel dat ρ' niet injectief is, dan $\mathrm{Ker}\, \rho' \neq 0$, dus is er een $0 \neq b \in A$ zodanig dat $\rho'(b) = 0 = (0, \dots, 0) \in \mathrm{End}(\oplus_{j=1}^r m_j V_j)$. Bekijk de oorspronkelijke representatie

$$\begin{array}{rccc} \rho : & A & \to & \mathrm{End}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) \\ & a & \mapsto & (\rho_1(a), \dots, \rho_n(a)). \end{array}$$

Elke representatie (ρ_i, V_i) uit $\{V_1, \dots, V_n\}$ is isomorf aan een unieke representatie (ρ'_j, V'_j) uit $\{V'_1, \dots, V'_r\}$. Zij $\phi : V'_j \to V_i$ isomorfisme van deze representaties, dan $\rho_i(b) = \phi \circ \rho'_j(b) \circ \phi^* = \phi \circ 0 \circ \phi^* = 0$. Dus $\rho_i(b) = 0\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ en dus $\rho(b) = 0$. Maar ϕ was injectief, tegenspraak. Dus ρ' is injectief. □

Bewering 2. De representatie

$$\begin{array}{rccc} \rho'': & A & \to & \mathrm{End}(\oplus_{j=1}^r V_j') \\ & a & \mapsto & (\rho_1'(a), \ldots, \rho_r'(a)), \end{array}$$

is injectief.

Bewijs. Als ρ'' niet injectief is, dan ρ' ook niet. $\square$

Zij $a \in A$ dan $\rho_j'(a)(V_j') \subseteq V_j'$ $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$. Dus $\rho''(a) = (\rho_1'(a), \ldots, \rho_r'(a)) \in \oplus_{j=1}^r \mathrm{End}(V_j')$. Dit geeft een injectief homomorfisme van algebra's

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\rho}: & A & \to & \oplus_{j=1}^r \mathrm{End}(V_j') \\ & a & \mapsto & (\rho_1'(a), \ldots, \rho_r'(a)). \end{array}$$

Stelling 4.32. *(Dichtheidsstelling) Zij A een algebra en $(\rho_1, V_1), \ldots, (\rho_r, V_r)$ paarsgewijs niet isomorfe irreducibele eindig dimensionale complexe representaties van A. Dan is het homomorfisme van algebra's*

$$\begin{array}{rccc} \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r: & A & \to & \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{End}(V_i) \\ & a & \mapsto & (\rho_1(a), \ldots, \rho_r(a)) \end{array}$$

surjectief.

Alvorens een bewijs te geven voor deze stelling, worden eerst een aantal notaties geïntroduceerd en twee benodigde lemma's bewezen.

Notatie: Schrijf

$$V_{N_1,\ldots,N_r} = \underbrace{V_1 \oplus \cdots \oplus V_1}_{N_1} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \cdots \oplus V_2}_{N_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{V_r \oplus \cdots \oplus V_r}_{N_r}.$$

En laat $p_{ij} : V_{N_1,\ldots,N_r} \to V_i$ de projectie zijn op V_{ij}, de j^e kopie van V_i in $\underbrace{V_i \oplus \cdots \oplus V_i}_{N_i}$.

Lemma 4.33. *Zij $W \subsetneq V_{N_1,\ldots,N_r}$ een deelrepresentatie. Dan bestaat er een automorfisme $\alpha : V_{N_1,\ldots,N_r} \to V_{N_1,\ldots,N_r}$ zodanig dat er een $k \in \{1, \ldots, r\}$ is waarvoor $p_{kN_k}(\alpha(W)) = 0$.*

Bewijs. (Lemma 4.33).
Bewijs met inductie over $N = \sum_{i=1}^r N_i$. Stel $N = 0$, dan $V_{N_1,\ldots,N_r} = 0 \oplus \cdots \oplus 0$ en is het duidelijk dat er zo'n α bestaat.

Inductie aanname: Wanneer $W' \subsetneq V_{N_1',\ldots,N_r'}$ een deelrepresentatie, met $\sum_{i=1}^r N_i' = N - 1$, dan bestaat er een automorfisme $\beta : V_{N_1',\ldots,N_r'} \to V_{N_1',\ldots,N_r'}$ zodanig dat er een $k \in \{1, \ldots, r\}$ is waarvoor $p_{kN_k}(\alpha(W')) = 0$.

Bewijs. Zij $\sum_{i=1}^r N_i = N$. Kies een irreducibele niet-nul deelrepresentatie Y van W. Deze bestaat volgens Lemma 4.20. Omdat $Y \neq 0$ zijn er $i \in \{1, \ldots, r\}$ en $j \in \{1, \ldots, N_i\}$ zodanig dat $p_{ij}|_Y : Y \to V_i$ niet de nul-afbeelding is. Neem, zonder verlies van algemeenheid, aan dat $j = 1$. Omdat $p_{i1}|_Y$ een niet-nul homomorfisme tussen de irreducibele representaties Y en V_i is, moet volgens het Lemma van Schur $p_{i1}|_Y$ een isomorfisme zijn. Dus $Y \cong V_i$ (als representaties). Per aanname zijn alle $V_1, \ldots, V_r$ paarsgewijs niet isomorf, dus kan er maar één $p_{ij}|_Y$ niet nul zijn. Want, stel dat er nog een $p_{lm}|_Y \neq 0$ voor een $l \neq i$ en voor een m.

Dan, om dezelfde reden, moet deze $p_{lm}|_Y : Y \to V_l$ een isomorfisme zijn en dan $V_i \cong P \cong V_l$. Tegenspraak. Dus $p_{lm}|_Y = 0 \ \forall l \neq i, \ \forall m$.
Bekijk $p_{im}|_Y \circ (p_{i1}|_Y)^{-1} : V_i \to Y \to V_i$ voor een willekeurige $m \in \{1, \ldots, N_i\}$. Dit is een endomorfisme van irreducibele representatie V_i en uit (het gevolg van) het Lemma van Schur volgt dan $p_{im}|_Y \circ (p_{i1}|_Y)^{-1} = \lambda_m \cdot \mathrm{Id}_{\mathrm{V_i}}$ voor een $\lambda_m \in \mathbb{C}$. Dus voor elke $m \in \{1, \ldots, N_i\}$: $p_{im}|_Y = \lambda_m \cdot p_{i1}|_Y$ voor een $\lambda_m \in \mathbb{C}$.

Notatie: Voor een $v \in V_{N_1,\ldots,N_r}$ schrijf $v = (v_{lm})$, waar $v_{lm} := p_{lm}(v)$.
Definieer $\gamma : V_{N_1,\ldots,N_r} \to V_{N_1,\ldots,N_r}$ door $\gamma(v) := (v'_{lm})$, waar

$$v'_{lm} = \begin{cases} v'_{lm} & := v_{lm} = p_{lm}(v) \text{ als } l \neq i, \\ v'_{i1} & := v_{i1} = p_{i1}(v), \\ v'_{im} & := v_{im} - \lambda_m \cdot v_{i1} = p_{im}(v) - \lambda_m \cdot p_{i1}(v) \text{ voor } m \in \{2, \ldots, N_i\}. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat γ een automorfisme is. Zij $v \in Y$ dan $v'_{lm} = v_{lm} = p_{lm}(v) = 0 \ \ \forall l \neq i, \ \forall m$, want $p_{lm} = 0 \ \ \forall l \neq i, \ \forall m$. En $v'_{im} = v_{im} - \lambda_m \cdot v_{i1} = p_{im}(v) - \lambda_m \cdot p_{i1}(v) = \lambda_m \cdot p_{i1}(v) - \lambda_m \cdot p_{i1}(v) = 0 \ \forall m \neq 1$. Dus voor elke $v \in Y$: $p_{lm}(\gamma(v)) = v'_{lm} = 0$ tenzij $l = i$ en $m = 1$. Daarom $p_{lm}(\gamma(Y)) = \{0\}$ tenzij $l = i$ en $m = 1$. En $p_{i1}(\gamma(Y)) = \{p_{i1}((v'_{lm})) \mid v \in Y\} = \{v'_{i1} = p_{i1}(v) \mid v \in Y\} = V_i \cong Y$. Dus $\gamma(Y) = V_{i1}$.

Definieer
$$\begin{array}{rccc} \phi : & V_{N_1,\ldots,N_r} & \to & V_{N_1,\ldots,N_i-1,\ldots,N_r} \\ & (v_{lm}) & \mapsto & (v_{lm} \text{ voor } (l,m) \neq (i,1)). \end{array}$$
Dan $\mathrm{Ker}(\phi) = V_{i1}$. Maar ook $\gamma(Y) = V_{i1}$, dus $\mathrm{Ker}(\phi) = \gamma(Y)$. Omdat $Y \subseteq W$ geldt $\mathrm{Ker}(\phi) = \gamma(Y) \subseteq \gamma(W)$. Daarom $\mathrm{Ker}(\phi|_{\gamma(W)}) = \mathrm{Ker}(\phi) = \gamma(Y)$. Uit de isomorfiestelling volgt nu:
$\phi(\gamma(W)) = \phi|_{\gamma(W)}(\gamma(W)) \cong \gamma(W)/\mathrm{Ker}(\phi|_{\gamma(W)}) = \gamma(W)/\gamma(Y) \cong W/Y$.

Bekijk $\sum_{j=1}^r N'_j$, waar $N'_j := N_j$ als $j \neq i$ en $N'_i := N_i - 1$. Omdat $\phi(\gamma(W)) \subsetneq V_{N_1,\ldots,N_i-1,\ldots,N_r}$ een deelrepresentatie is en $\sum_{j=1}^r N'_j = N - 1$, dan bestaat er per inductie aaname een automorfisme $\beta : V_{N_1,\ldots,N_i-1,\ldots,N_r} \to V_{N_1,\ldots,N_i-1,\ldots,N_r}$ zodanig dat voor een $k \in \{1, \ldots, r\}$: $p_{kN'_k}(\beta(\phi(\gamma(W)))) = 0$.

Definieer
$$\alpha := (\mathrm{Id}_{V_{i1}} \oplus \beta) \circ \gamma : V_{N_1,\ldots,N_r} \to V_{N_1,\ldots,N_r},$$
waar $\mathrm{Id}_{V_{i1}}$ de identiteit is op de eerste kopie van V_i. Het is duidelijk dat α een automorfisme is.
Merk op dat $\mathrm{Id}_{V_{i1}} \oplus \phi|_{V_{N_1,\ldots,N_i-1,\ldots,N_r}} = \mathrm{Id}_{V_{N_1,\ldots,N_r}}$.
Dan $\mathrm{Id}_{V_{i1}} \oplus \beta = (\mathrm{Id}_{V_{i1}} \oplus \beta) \circ (\mathrm{Id}_{V_{i1}} \oplus \phi|_{V_{N_1,\ldots,N_i-1,\ldots,N_r}}) = (\mathrm{Id}_{V_{i1}} \oplus 0) + (\beta \circ \phi)$.
Dus $p_{kN_k}(\alpha(W)) = p_{kN_k}(((\mathrm{Id}_{V_{i1}} \oplus 0) + (\beta \circ \phi))(\gamma(W))) = 0 + p_{kN'_k}(\beta(\phi(\gamma(W)))) = 0$. □

Lemma 4.34. *Zij $W \subseteq V_{N_1,\ldots,N_r}$ een deelrepresentatie. Dan $W \cong V_{M_1,\ldots,M_r}$ voor bepaalde $M_i \leq N_i$.*

Bewijs. (Lemma 4.34)
Bewijs met inductie over $N = \sum_{i=1}^r N_i$. Stel $N = 0$ dan $W = 0$. Neem nu aan $N > 0$.

Inductie aanname: Wanneer $W' \subseteq V_{N'_1,\ldots,N'_r}$, een deelrepresentatie is en $\sum_{i=1}^r N'_i = N - 1$. Dan $W' \cong V_{M_1,\ldots,M_r}$ voor bepaalde $M_i \leq N'_i$.

Bewijs. Als $W = V_{N_1,\ldots,N_r}$, dan neem $M_i := N_i \ \forall i$. Neem nu aan dat $W \subsetneq V_{N_1,\ldots,N_r}$. Uit het vorige lemma volgt dat er dan een automorfisme $\alpha : V_{N_1,\ldots,N_r} \to V_{N_1,\ldots,N_r}$ bestaat zodanig dat voor een $k \in \{1,\ldots,r\}$: $p_{kN_k}(\alpha(W)) = 0$. Hieruit volgt dat $\alpha(W) \subseteq V_{N_1,\ldots,N_k-1,\ldots,N_r}$. Per inductie aanname: $W \cong \alpha(W) \cong V_{M_1,\ldots,M_r}$ voor bepaalde $M_i \leq N_i$ (i.h.b. $M_k \leq N_k - 1 < N_k$). $\square$

Bewijs. (Stelling 4.32 (Dichtheidsstelling))
Schrijf A voor $A/\operatorname{Ker}(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r)$, dan is aan te nemen dat $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ injectief is, en $A \cong (\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r)(A)$. Als we laten zien dat $(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r)(A) = \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$, dan $A \cong \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$. Wanneer we A vervolgens weer zien zonder uitdeling naar $\operatorname{Ker}(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r)$, volgt hieruit dat $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ surjectief is.

Omdat nu per aanname $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ injectief is, kunnen we A identificeren met zijn beeld in $\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$. Neem aan dat $A \subseteq \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$. Dan is A een deelrepresentatie van $\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$, waar $\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$ een representatie is van A, door

$$\begin{array}{rcc} A & \to & \operatorname{End}(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)) \\ a & \mapsto & ((f_1,\ldots,f_r) \mapsto (\rho_1(a)f_1,\ldots,\rho_r(a)f_r)). \end{array}$$

Voor elke $i \in \{1,\ldots r\}$ zij $d_i = \dim(V_i)$, dan $\operatorname{End}(V_i) \cong \underbrace{(V_i \oplus \cdots \oplus V_i)}_{d_i}$ $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$ (Propositie 4.26). Dus A is een deelrepresentatie van $\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i) \cong V_{d_1,\ldots,d_r}$. We kunnen A met zijn beeld in $V_{d_1,\ldots,d_r}$ identificeren en zo aannemen dat $A \subseteq V_{d_1,\ldots,d_r}$. Volgens Lemma 4.34 geldt nu: $A \cong V_{M_1\ldots,M_r}$ voor bepaalde $M_i \leq d_i$. Dus $\dim(A) = \dim(V_{M_1\ldots,M_r}) = \sum_{i=1}^r M_i d_i$. Identificeer A met $V_{M_1\ldots,M_r}$.

Bekijk $\operatorname{End}_A(A)$. Bekijk een kopie van V_i in A en zij $f \in \operatorname{End}_A(A)$ willekeurig . Omdat, per aanname, de Vi's paarsgewijs niet isomorf zijn, kan V_i onder f niet naar een andere V_j worden afgebeeld. Dus V_i wordt onder f afgebeeld binnen de M_i kopiën van V_i in A. Dit geldt voor alle kopiën van V_i, dus $f|_{M_iV_i}(M_iV_i) \subseteq M_iV_i$. Het endomorfisme f was willekeurig en V_i ook, dus onder elk endomorfisme uit $\operatorname{End}_A(A)$ wordt een sommand M_iV_i binnen zichzelf afgebeeld. Daarnaast, volgt uit het Lemma van Schur dat voor elke $i \in \{1,\ldots,r\}$: $\operatorname{End}_A(V_i) = \mathbb{C}$.

Kies een basis voor A. Elke $f \in \operatorname{End}_A(A)$ is dan te schrijven als complexe vierkantsmatrix D_f ten opzichte van deze basis. De matrix D_f is een blokmatrix met op de diagonaal vierkantsmatrices die horen bij de $f|_{M_iV_i}$ $(i \in \{1,\ldots,r\})$. Dus $\operatorname{End}_A(A) \cong \oplus_{i=1}^r \operatorname{Mat}_{M_i}(\mathbb{C})$ en $\dim(\operatorname{End}_A(A)) = \dim(\oplus_{i=1}^r \operatorname{Mat}_{M_i}(\mathbb{C})) = \sum_{i=1}^r M_i^2$. Daarnaast geldt $\operatorname{End}_A(A) \cong A^{op}$ (zie Propositie 4.21), dus $\sum_{i=1}^r M_i^2 = \dim(A^{op}) = \dim(A) = \sum_{i=1}^r M_i d_i$. Hieruit volgt dat $\sum_{i=1}^r M_i(d_i - M_i) = 0$, waar elke $d_i - M_i \geq 0$ omdat $M_i \leq d_i$.

Omdat $1 \in A$ is elke $\rho_i : A \to \operatorname{End}(V_i)$ niet nul, en dus $0 \neq \rho_i(A)$ $\forall i$. Omdat $\operatorname{End}(V_i) \cong d_iV_i$ $\forall i$ (directe som van irreducibele representaties) moet A, als deelrepresentatie van $V_{d_1,\ldots,d_r}$, minimaal één kopie van elke V_i bevatten. Dus $M_i > 0$ $\forall i$ en dus $d_i - M_i = 0$ $\forall i$ (anders $\sum_{i=1}^r M_i(d_i - M_i) > 0$). Dus $M_i = d_i$ $\forall i$ en $A = V_{M_1,\ldots,M_r} = V_{d_1,\ldots,d_r} \cong \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$.

We hadden A geïdentificeerd met zijn beeld $(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r)(A)$, en vervolgens geïdentificeerd met $V_{M_1,\ldots,M_r}$. Dus $(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r)(A) = \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i)$.
Wanneer we A weer bekijken zonder uitdeling naar $\operatorname{Ker}(\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r)$, volgt dat $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r$ surjectief moet zijn. $\square$

Propositie 4.35. *Een eindig dimensionale algebra A heeft eindig veel paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele representaties V_i en deze representaties zijn eindig dimensionaal.*

Bewijs. Zij (ρ, V) een irreducibele representatie van A en zij $0 \neq v \in V$, dan is $\rho(A)v \subseteq V$ een eindig dimensionale deelrepresentatie van V. Want A is eindig dimensionaal. Omdat V irreducibel is en $\rho(A)v \neq 0$, is $\rho(A)v = V$ en V is dus eindig dimensionaal.

Stel dat er oneindig veel paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele representaties van A zijn. Dan bestaan er r niet-isomorfe irreducibele representaties $V_1, \dots, V_r$ zodanig dat $r > \dim(A)$. Maar dan kan het homomorfisme

$$\begin{array}{rccc} \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_r : & A & \to & \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(V_i) \\ & a & \mapsto & (\rho_1(a), \dots, \rho_r(a)) \end{array}$$

niet surjectief zijn, want dan $\dim(\bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(V_i)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(\operatorname{End}(V_i)) > r = \dim(A)$. Tegenspraak met Stelling 4.32. Dus zijn er eindig veel paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele representaties van A. $\square$

Gevolg 4.36. *Zij A een algebra, getrouw gerepresenteerd op een eindig dimensionale complexe inproductruimte V, geschreven (ρ, V). Dan geeft dit een injectief homomorfisme van algebra's*

$$\begin{array}{rccc} \rho : & A & \to & \oplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(V_i) \\ & a & \mapsto & (\rho_1(a), \dots, \rho_r(a)), \end{array}$$

waar $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_r, V_r)$ paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele deelrepresentaties zijn (zie Opmerking 4.31). Uit de Dichtheidsstelling volgt dat ρ surjectief is, dus $A \cong \oplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(V_i)$. Uit Propositie 4.35 volgt dat dit alle paarsgewijs niet-isomorfe representaties van A moeten zijn. Dus is de directe som $\oplus_{i=1}^{r} \operatorname{End}(V_i)$ uniek geschreven op permutatie van de volgorde $(1, \dots, r)$ van de directe som na en op het vervangen van één of meerdere irreducibele representaties V_i door een isomorfe representatie na. Zij $d_i = \dim(V_i)$, dan $A \cong \oplus_{i=1}^{r} \operatorname{Mat}_{d_i}(\mathbb{C})$.

5 Eindig spectraal tripel

Definitie 5.1 (Eindig spectraal tripel)**.** Een *eindig spectraal tripel* is een tripel (A, V, D) van een eindig dimensionale unitale associatieve complexe *-algebra A, getrouw gerepresenteerd op een complexe inproductruimte V, samen met een Hermitese transformatie $D : V \to V$.

Voorbeeld 5.2. Zij $V = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ en $D = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \beta \\ \bar{\beta} & \alpha_2 \end{smallmatrix}\right)$, voor bepaalde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{C}$. En representatie $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$, waar

$$\rho\big[(\lambda_1, \lambda_2)\big]\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_2 \end{smallmatrix}\right) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Dan is (A, V, D) een eindig spectraal tripel.

Opmerking 5.3. Wanneer we een eindig spectraal tripel (A, V, D) bekijken kunnen we een aantal eerdere resultaten toepassen. Zij $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ de getrouwe representatie op V gegeven door het tripel, dan bestaan er eindig veel irreducibele deelrepresentaties $V_1, \ldots, V_n$ van V zodanig dat $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. Verder bestaat er dan een isomorfisme van representaties $u : V \xrightarrow{\cong} \oplus_{i=1}^r m_i V_i'$, waar $V_i' \in \{V_1, \ldots, V_n\}$ en $V_i' \ncong V_j'$ als $i \neq j$. Deze directe som is uniek op permutatie van de volgorde $(1, \ldots, r)$ na en op het vervangen van één of meerdere irreducibele representaties V_i' door een isomorfe representatie na. Herinner dat dit isomorfisme een unitaire afbeelding tussen de inproductruimten V en $\oplus_{i=1}^r m_i V_i'$ is.
Verder hebben we gezien dat $\phi : A \xrightarrow{\cong} \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}(V_i'),\ a \mapsto (\rho_1'(a), \ldots, \rho_r'(a))$ een isomorfisme van algebra's is en deze directe som ook uniek is op permutatie van de volgorde $(1, \ldots, r)$ na en op het vervangen van één of meerdere irreducibele representaties V_i' door een isomorfe representatie na. Deze relaties geven aanleiding tot een definitie:

Definitie 5.4. Zij (A, V, D) en (B, W, E) eindige spectrale tripels met representaties (ρ_1, V) van A en (ρ_2, W) van B. Dan heet (A, V, D) *unitair equivalent* aan (B, W, E), geschreven $(A, V, D) \sim (B, W, E)$, als er een isomorfisme van algebra's $\phi : A \to B$ en unitaire afbeelding $u : V \to W$ bestaat zodanig dat $(\rho_2 \phi)(a) = u \rho_1(a) u^*\ \forall a \in A$.

Propositie 5.5. *De relatie $\sim$ 'unitair equivalent' zoals gedefinieerd in Definitie 5.4 is daadwerkelijk een equivalentierelatie.*

Bewijs. Voor $i \in \{1, 2, 3\}$, zij (A_i, V_i, D_i) een eindig spectraal tripel met representatie $\rho_i : A_i \to \mathrm{End}(V_i)$.

(reflexief) Bekijk (A_1, V_1, D_1). Dan geeft de identiteitsafbeelding $\mathrm{Id}_{A_1} : A_1 \to A_1$ een isomorfisme van algebra's en de identiteitsafbeelding $\mathrm{Id}_{V_1} : V_1 \to V_1$ een unitaire afbeelding die voldoet aan $(\rho_1 \mathrm{Id}_{A_1})(a_1) = \mathrm{Id}_{V_1} \rho_1(a_1) \mathrm{Id}_{V_1}^*\ \ \forall a_1 \in A_1$. Verder ook $D_1 = \mathrm{Id}_{V_1} D_1 \mathrm{Id}_{V_1}^*$. Dus $(A_1, V_1, D_1) \sim (A_1, V_1, D_1)$.

(symmetrisch) Zij $(A_1, V_1, D_1) \sim (A_2, V_2, D_2)$. Dan bestaat er een $\phi : A_1 \xrightarrow{\cong} A_2$ isomorfisme van algebra's en een unitaire afbeelding $u : V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$ waarvoor $\rho_2(\phi(a_1)) = (\rho_2 \phi)(a_1) = u \rho_1(a_1) u^*\ \forall a_1 \in A_1$, en dus $\rho_1(a_1) = u^*(\rho_2(\phi(a_1)) u\ \forall a_1 \in A_1$. Dan is $\phi^{-1} : A_2 \xrightarrow{\cong} A_1$ isomorfisme van algebra's en $u^{-1} = u^* : V_2 \xrightarrow{\cong} V_1$ unitaire afbeelding waarvoor

$$\rho_1(\phi^{-1}(a_2)) = u^*(\rho_2(\phi(\phi^{-1}(a_2)))u = u^*(\rho_2(a_2))(u^*)^*.$$

Dus $(A_2, V_2, D_2) \sim (A_1, V_1, D_1)$.

(transitief) Zij $(A_1, V_1, D_1) \sim (A_2, V_2, D_2)$ en $(A_2, V_2, D_2) \sim (A_3, V_3, D_3)$. Dan zijn er isomorfismen van algebra's $\phi_1 : A_1 \xrightarrow{\cong} A_2$ en $\phi_2 : A_2 \xrightarrow{\cong} A_3$, en unitaire afbeeldingen $u_1 : V_1 \xrightarrow{\cong} V_2$ en $u_2 : V_2 \xrightarrow{\cong} V_3$, zodanig dat

$$\rho_2(\phi_1(a_1)) = u_1\rho_1(a_1)u_1^* \ \forall a_1 \in A_1 \text{ en } \rho_3(\phi_2(a_2)) = u_2\rho_2(a_2)u_2^* \ \forall a_2 \in A_2.$$

Dan is $\phi_2\phi_1$ een isomorfisme van algebra's en u_2u_1 een unitaire afbeelding waarvoor

$$\rho_3(\phi_2(\phi_1(a_1))) = u_2\rho_2(\phi_1(a_1))u_2^* = u_2u_1\rho_1(a_1)u_1^*u_2^* = (u_2u_1)\rho_1(a_1)(u_2u_1)^* \ \forall a_1 \in A_1.$$

Dus $(A_1, V_1, D_1) \sim (A_3, V_3, D_3)$ en de relatie $\sim$ 'unitair equivalent' van eindige spectrale tripels is een equivalentie relatie. $\square$

Opmerking 5.6. Bekijk nogmaals het eindig spectraal tripel (A, V, D) voor Definitie 5.4, waar $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, $\rho : A \to \operatorname{End}(V)$ getrouwe representatie, $u : V \xrightarrow{\cong} \oplus_{i=1}^r m_i V_i'$ en $\phi : A \xrightarrow{\cong} \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i')$. Dan is een eindig spectraal tripel te construeren welke unitair equivalent is aan (A, V, D), namelijk, definieer

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\rho}: & \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i') & \to & \operatorname{End}(\oplus_{i=1}^r m_i V_i') \\ & (f_1, \ldots, f_r) & \mapsto & (\underbrace{f_1, \ldots, f_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{f_r, \ldots, f_r}_{m_r}), \end{array}$$

waar $(\underbrace{f_1, \ldots, f_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{f_r, \ldots, f_r}_{m_r}) :$

$$(v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{m_r}^r) \mapsto (f_1(v_1^1), \ldots, f_1(v_{m_1}^1), \ldots, f_r(v_1^r), \ldots, f_r(v_{m_r}^r)).$$

Definieer ook $\widetilde{D} := uDu^*$. Bekijk $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i'), \oplus_{i=1}^r m_i V_i', \widetilde{D})$ met representatie $\widetilde{\rho}$.

Propositie 5.7. *$\widetilde{\rho}$ is een representatie en $(A, V, D) \sim (\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i'), \oplus_{i=1}^r m_i V_i', \widetilde{D})$.*

Bewijs. Duidelijk dat $\widetilde{\rho}$ een lineaire afbeelding is, want alle f_i zijn lineair.
De identiteit $1 \in \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i')$ is $1 = (\operatorname{Id}_{V_1'}, \ldots, \operatorname{Id}_{V_r'})$ en

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(1)(v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{m_r}^r) &= (\operatorname{Id}_{V_1'}(v_1^1), \ldots, \operatorname{Id}_{V_1'}(v_{m_1}^1), \ldots, \operatorname{Id}_{V_r'}(v_1^r), \ldots, \operatorname{Id}_{V_r'}(v_{m_r}^r)) \\ &= (v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{m_r}^r). \end{aligned}$$

Dus $\widetilde{\rho}(1) = 1_{\operatorname{End}(\oplus_{i=1}^r m_i V_i')}$. Stel $(f_1, \ldots, f_r), (g_1, \ldots, g_r) \in \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i')$, dan:

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}((f_1, \ldots, f_r)(g_1, \ldots, g_r)) &= \widetilde{\rho}(f_1g_1, \ldots, f_rg_r) \\ &= (f_1g_1, \ldots, f_1g_1, \ldots, f_rg_r, \ldots, f_rg_r) \\ &= (f_1, \ldots, f_1, \ldots, f_r, \ldots, f_r)(g_1, \ldots, g_1, \ldots, g_r, \ldots, g_r) \\ &= \widetilde{\rho}(f_1, \ldots, f_r)\widetilde{\rho}(g_1, \ldots, g_r), \text{ en} \\ \widetilde{\rho}((f_1, \ldots, f_r)^*) &= \widetilde{\rho}((f_1^*, \ldots, f_r^*)) \\ &= (f_1^*, \ldots, f_1^*, \ldots, f_r^*, \ldots, f_r^*) \\ &= (f_1, \ldots, f_1, \ldots, f_r, \ldots, f_r)^* \\ &= (\widetilde{\rho}(f_1, \ldots, f_r))^*. \end{aligned}$$

De inverse van $\widetilde{\rho}$ wordt gegeven door $\widetilde{\rho}^{-1} : (f_1, \ldots, f_1, \ldots, f_r, \ldots, f_r) \mapsto (f_1, \ldots, f_r)$.
Dus $\widetilde{\rho}$ is een isomorfisme van algebra's en in het bijzonder een representatie. Stel $a \in A$, dan

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho}(\phi(a))(v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{m_r}^r) &= \widetilde{\rho}(\rho_1'(a), \ldots, \rho_r'(a))(v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{m_r}^r) \\ &= (\rho_1'(a)(v_1^1), \ldots, \rho_1'(a)(v_{m_1}^1), \ldots, \rho_r'(a)(v_1^r), \ldots, \rho_r'(a)(v_{m_r}^r)), \end{aligned}$$

waar voor elke $i:\ \rho'_i(a) := \rho(a)|_{V'_i}\ \forall a \in A$.
Bekijk een V'_{ik} (waar V'_{ik} de k-de V'_i uit $m_i V'_i$ is). Dan is er een $V_j \in \{V_1, \dots, V_n\}$ zodanig dat $u|_{V_j}(V_j) \cap V'_{ik} \neq 0$, omdat V'_{ik} irreducibel is moet gelden $u|_{V_j}(V_j) = V'_{ik}$, dus deze V_j is uniek voor V'_{ik}. De afbeelding $\psi := p_{ik} \circ u|_{V_j} : V_j \to V'_{ik}$, waar p_{ik} de projectie op V'_{ik} is, is een isomorfisme van de representaties $(\rho_j, V_j), (\rho'_i, V'_{ik})$. Daarvoor $\rho'_i(a) = \psi\rho_j(a)\psi^*\ \forall a \in A$ en $p_{lm} \circ u|_{V_j} = 0\ \forall (l,m) \neq (i,k)$. Dit geldt voor elke V'_{ik} $(1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq m_i)$, dus $\widetilde{\rho}(\phi(a)) = u\rho(a)u^*$.
De afbeelding u is een isomorfisme van representaties en in het bijzonder unitair. Omdat D Hermitisch is en u unitair, is $\widetilde{D} = uDu^*$ Hermitisch.
Dus $(A, V, D) \sim (\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V'_i), \oplus_{i=1}^r m_i V'_i, \widetilde{D})$. □

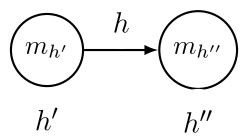
Opmerking 5.8. Wanneer we kijken naar de nevenklasse van een eindige spectrale tripel (A, V, D) modulo unitaire equivalentie, kunnen we altijd een representant kiezen van de vorm $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V'_i), \oplus_{i=1}^r m_i V'_i, \widetilde{D})$, waar alle $V'_1, \dots, V'_r$ paarsgewijs niet-isomorfe irreducibele representaties zijn en de representatie $\widetilde{\rho} : \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V'_i) \to \operatorname{End}(\oplus_{i=1}^r m_i V'_i)$ werkt zoals $\widetilde{\rho}$ in Opmerking 5.6. Deze representant is uniek geschreven op permutatie van de volgorde $(1, \dots, r)$ van de directe sommen na (waarbij $\widetilde{D}$ mee verandert) en op het vervangen van één of meerdere V'_i door isomorfe representaties na (waarbij $\widetilde{D}$ mee verandert).
Vanaf nu schrijven we eenvoudiger $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ met representatie ρ als we kijken naar een dergelijk eindig spectraal tripel.

Voorbeeld 5.9. Een motiverend voorbeeld van een eindig spectraal tripel is dat het Standaard Model als eindig spectraal tripel te schrijven is. Zie bijvoorbeeld Hoofdstuk 1.12 *Noncommutative geometry and the Standard Model* uit *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives* van A. Connes en M. Marcolli [3]. Of Hoofdstuk 3 *Het Standaard Model* uit *Niet-commutatieve Meetkunde en het Standaardmodel* van R. Jonker [11].

6 Quivers

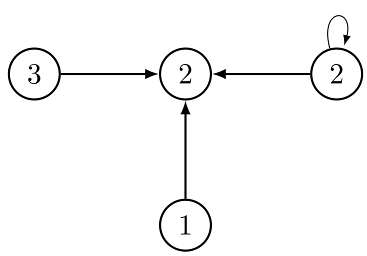
Definitie 6.1 (Quiver)**.** Een (eindige) *quiver* Q is een gerichte graaf met eindig veel knopen, waarbij elke knoop een multipliciteit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ heeft, er eventueel lussen kunnen voorkomen en maximaal één pijl tussen twee knopen kan voorkomen (dus ook maximaal één lus per knoop).

We schrijven een quiver Q ook wel als $Q = (I, E)$, waar I de verzameling van knopen is en E de verzameling van pijlen. En schrijven een knoop als $[i, m_i] \in I$, waar m_i voor de multipliciteit staat.
Voor een pijl $h \in E$ laat $[h, m_h]$ de oorsprong van de pijl h zijn, en $[h', m'_h]$ het doel van de pijl h:



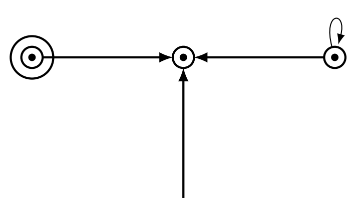
Dan kunnen we h ook schrijven als (h', h''). Met 'een knoop $[i, m_i]$ uit Q' wordt een knoop $[i, m_i] \in I$ bedoeld en met 'een pijl h uit Q' wordt een pijl $h \in E$ bedoeld.

Voorbeeld 6.2. Een quiver Q :



Opmerking 6.3. Als de multipliciteit van een knoop laag is, dan kunnen we deze ook weergeven door cirkels om de knoop in plaats van het vermelden van de waarde in de knoop. Zie Voorbeeld 6.4.

Voorbeeld 6.4. De quiver Q uit Voorbeeld 6.2 is ook weer te geven als:



Definitie 6.5 (Quiver representatie)**.** Een *representatie* $R(Q)$ van een quiver Q is:

1. Voor elke $[i, m_i] \in I$ een toekenning van een niet-nul eindig dimensionale complexe inproductruimte V_i aan $[i, m_i] \in I$,

2. Voor elke lus $l \in E$ een toekenning van een niet-nul Hermitese lineaire transformatie $x_l : m_{l'}V_{l'} \to m_{l''}V_{l''}$ aan l,

3. Voor elke pijl (niet lus) $h \in E$, een toekenning van een niet-nul lineaire afbeelding $x_h : m_{h'}V_{h'} \to m_{h''}V_{hl''}$ aan h,

waar $m_jV_j := \underbrace{V_j \oplus \cdots \oplus V_j}_{m_j}$.
We schrijven $R(Q)$ ook wel als $R(Q) = (\{V_i\}, \{x_h\})$, waar $\{V_i\}$ voor de verzameling van toegewezen inproductruimten staat, en $\{x_h\}$ voor de verzameling van toegewezen afbeeldingen. Een toegewezen V_i aan een knoop $[i, m_i]$ wordt ook wel de 'knooprepresentatie' van knoop $[i, m_i]$ genoemd, en een toegewezen x_h aan een pijl h wordt ook wel de 'pijlrepresentatie' van pijl h genoemd.

Opmerking 6.6. Aangezien er tussen twee knopen $[i, m_i], [j, m_j]$ maximaal één pijl (of eventueel lus) $h = (i, j)$ kan voorkomen, kunnen we pijlrepresentatie $x_h : m_iV_i \to m_jV_j$ van h ook schrijven als x_{ij}.

Definitie 6.7 (Homomorfisme van quiver representaties)**.** Zij Q een quiver, en
$R(Q) = (\{V_i\}, \{x_h\}), R'(Q) = (\{W_j\}, \{y_h\})$ twee quiver representaties. Een *homomorfisme* $\phi : \{V_i\} \to \{W_j\}$ van quiver representaties is een collectie van isometriën $\phi_i : V_i \to W_i$ zodanig dat $y_h = \phi_{h''} \circ x_h \circ \phi^*_{h'}$ $\forall h \in E$.

Definitie 6.8 (Isomorfisme van quiver representaties)**.** Een homomorfisme $\phi : \{V_i\} \to \{W_j\}$ van quiver representaties heet een *isomorfisme (van quiver representaties)* wanneer elke $\phi_i : V_i \to W_i$ een unitaire afbeelding is. Twee quiver representaties heten *isomorf* wanneer er een isomorfisme tussen bestaat.

Definitie 6.9 (Quiver combinatie)**.** Een *quiver combinatie* $(Q, R(Q))$ is een quiver Q met een bijhorende quiver representatie $R(Q)$ van Q.

6.1 Classificatie van eindige spectrale tripels

Bekijk een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_iV_i, D)$. Definieer

$$D_{ij} := p_{m_jV_j} \circ D|_{m_iV_i} \qquad i, j \in \{1, \dots, r\},$$

waar $p_{m_jV_j}$ de projectie op m_jV_j is.
Omdat D Hermitisch is, geldt $D_{ij} = D^*_{ji}$ $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$. In het bijzonder $D_{ii} = D^*_{ii}$ $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, wat betekent dat D_{ii} Hermitisch is voor elke $i \in \{1, \dots, r\}$. Dit is bijvoorbeeld in te zien door voor elke V_i een orthonormale basis te kiezen, wat een orthonormale basis geeft voor $\oplus_{i=1}^r m_iV_i$, en D als matrix M_D te schrijven op deze basis voor $\oplus_{i=1}^r m_iV_i$. Dan $M_D = {M_D}^* = \overline{M_D}^T$. De blokdiagonaal van M_D bestaat uit de matrices $M_{D_{11}}, \dots, M_{D_{rr}}$, waarvoor geldt $M_{D_{ii}} = \overline{M_{D_{ii}}}^T = M^*_{D_{ii}}$, en voor een matrix $M_{D_{ij}}$ $(i \neq j)$ buiten de blokdiagonaal geldt $M_{D_{ij}} = \overline{M_{D_{ji}}}^T = M^*_{D_{ji}}$. Dus $D_{ij} = D^*_{ji}$ $\forall i, j \in \{1, \dots, r\}$.
Merk op dat D volledig gedefinieerd is wanneer alle D_{ij} gedefinieerd zijn voor $i \leq j$, $\quad i, j \in \{1, \dots, r\}$.

Het doel is om een één-op-één verband aan te tonen tussen de nevenklassen van eindige spectrale tripels modulo unitaire equivalentie en de nevenklassen van quiver combinaties modulo 'unitaire equivalentie'. De definitie van unitaire equivalentie tussen quiver combinaties volgt nog, maar eerst zal de definitie van een 'quiver combinatie met ordening' worden gegeven, die gebruikt zal worden om uiteindelijk dit verband aan te tonen.

Definitie 6.10 (Quiver combinatie met ordening)**.** Zij $(Q, R(Q))$ een quiver combinatie.
Schrijf $Q = (I, E)$, $R(Q) = (\{V_i\}, \{x_h\})$ en stel $\#I = r$. Dan kunnen we deze r knopen labelen

met de getallen $1, \dots, r$, wat een ordening s geeft van de knopen: $I = \{[1, m_1], \dots, [r, m_r]\} = \{[i, m_i]\}_{i=1}^r$, en de bijhorende knooprepresentaties: $\{V_1, \dots, V_r\} = \{V_i\}_{i=1}^r$. Waar voor elke $1 \leq i \leq r$ de ruimte V_i de complexe inproductruimte is die in $R(Q)$ is toegekend aan knoop $[i, m_i]$. We zeggen dat $[i, m_i] < [j, m_j]$ als $i < j$ (ten opzichte van ordening s).
Een *quiver combinatie met ordening*, geschreven $(Q, R(Q), s)$, is een quiver combinatie $(Q, R(Q))$ met een dergelijke ordening s.

Constructie 1: Van quiver combinatie met ordening naar eindig spectraal tripel.

Gegeven: Een quiver combinatie met ordening $(Q, R(Q), s)$, waar $Q = (I, E)$, $\#I = r$ en $R(Q) = (\{V_i\}, \{x_h\})$.

Met behulp van de volgende stappen geeft $(Q, R(Q), s)$ een eindig spectraal tripel:

1. Door de ordening s is de verzameling knopen te schrijven als $I = \{[i, m_i]\}_{i=1}^r$ en de verzameling van knooprepresentaties als $\{V_i\}_{i=1}^r$.

2. Definieer:

   $V := \oplus_{i=1}^r m_i V_i$ (volgorde s), waar m_i de multipliciteit van $[i, m_i]$ is,
   $A := \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i)$ (volgorde s), en
   $D : V \to V$, door

   $D(v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, \dots, v_1^r, \dots, v_{m_r}^r) :=$
   $(D_{11}(v_1^1, \dots, v_{m_1}^1) + \dots + D_{r1}(v_1^r, \dots, v_{m_r}^r), \dots, D_{1r}(v_1^1, \dots, v_{m_1}^1) + \dots + D_{rr}(v_1^r, \dots, v_{m_r}^r))$,

   $$\text{waar } D_{ij} := \begin{cases} x_{ij} & \text{als } x_{ij} \in \{x_h\}, \\ x_{ji}^* & \text{als } x_{ji} \in \{x_h\}, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

3. Dan is $(A, V, D) = (\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ een eindig spectraal tripel met representatie $\rho : \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i) \to \mathrm{End}(\oplus_{i=1}^r m_i V_i)$ zoals gedefinieerd in Opmerking 5.6.

Opmerking bij Constructie 1: De afbeelding D is goed gedefinieerd, want stel $[i, m_i], [j, m_j] \in I$, dan bevat Q maximaal één pijl tussen deze knopen. Dus òf $R(Q)$ bevat een x_{ij} òf een x_{ji} òf geen afbeelding tussen de knopen $[i, m_i]$ en $[j, m_j]$. En stel dat een $x_{ii} \in \{x_h\}$, dan is deze per definitie Hermitisch, dus $D_{ii} = x_{ii} = x_{ii}^*$. Verder is D duidelijk lineair en door het volledig uitschrijven van $\langle D(v), w \rangle$ en $\langle v, D(w) \rangle$ voor willekeurige $v, w \in \oplus_{i=1}^r m_i V_i$ is na te gaan dat D Hermitisch is.

Constructie 2: Van eindig spectraal tripel naar quiver combinatie met ordening.

Gegeven: $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$.
De directe som $\oplus_{i=1}^r m_i V_i$ geeft een volgorde $s = (1, \dots, r)$ waarin $m_1 V_1, \dots, m_r V_r$ staan.

Met behulp van de volgende constructie is een quiver combinatie met ordening $(Q, R(Q), s)$ te construeren:

Construeer quiver $Q = (I, E)$:

1. Construeer r knopen $[1, m_1], \dots, [r, m_r]$ in de volgorde s, waar voor elke $i \in \{1, \dots, r\}$, m_i wordt gegeven door de i'de sommand $m_i V_i$ uit $\oplus_{i=1}^r m_i V_i$,

2. Construeer een pijl (i, j) (van een knoop $[i, m_i]$ naar $[j, m_j]$) als $i \leq j$ en $D_{ij} \neq 0$.

Construeer bijhorende representatie $R(Q)$:

1. Voor elke $i \in \{1, \dots, r\}$: ken de complexe inproductruimte V_i toe aan knoop $[i, m_i] \in I$,
2. Voor elke pijl $(i, j) \in E$: ken de afbeelding D_{ij} toe aan (i, j).

Kies s als ordening voor de geconstrueerde $(Q, R(Q))$ en definieer: $(Q, R(Q), s)$.

Opmerking 6.11 (Permutatie van ordening)**.** Zij $(Q, R(Q), s)$ een quiver combinatie met ordening, $Q = (I, E) = (\{V_i\}_{i=1}^r, E)$ en $R(Q) = (\{V_i\}_{i=1}^r, \{x_h\})$. Door het toepassen van Constructie 1 krijgen we een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ met representatie ρ.
Stel we hadden een andere ordening $s' = (\sigma(1), \dots, \sigma(r))$, welke een permutatie σ van s is, dan geeft Constructie 1 een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_{\sigma(i)}), \oplus_{i=1}^r m_{\sigma(i)} V_{\sigma(i)}, \widetilde{D})$ met representatie $\widetilde{\rho} : \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_{\sigma(i)}) \to \mathrm{End}(\oplus_{i=1}^r m_{\sigma(i)} V_{\sigma(i)})$. De permutatie

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i) & \overset{\cong}{\longrightarrow} & \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_{\sigma(i)}) \\ & (f_1, \dots, f_r) & \mapsto & (f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(r)}) \end{array}$$

is een isomorfisme van algebra's, en de permutatie

$$\begin{array}{rccc} u : & \oplus_{i=1}^r m_i V_i & \overset{\cong}{\longrightarrow} & \oplus_{i=1}^r m_{\sigma(i)} V_{\sigma(i)} \\ & (v_1^1, \dots, v_{m_1}^1, \dots, v_1^r, \dots, v_{m_r}^r) & \mapsto & (v_1^{\sigma(1)}, \dots, v_{m_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)}, \dots, v_1^{\sigma(r)}, \dots, v_{m_{\sigma(r)}}^{\sigma(r)}) \end{array}$$

een unitaire afbeelding, waarvoor $\widetilde{\rho}\phi(a) = u\rho(a)u^* \ \forall a \in \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i)$.
De afbeelding $\widetilde{D}$ wordt gegeven door de afbeeldingen $\widetilde{D}_{\sigma(i)\sigma(j)}$ $(i, j \in \{1, \dots, r\})$ en $\widetilde{D} = uDu^*$.
Dus $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D) \sim (\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_{\sigma(i)}), \oplus_{i=1}^r m_{\sigma(i)} V_{\sigma(i)}, \widetilde{D})$.

Opmerking 6.12 (Omkering van pijlen met pijl representaties)**.** Zij $(Q, R(Q), s)$ een quiver combinatie met ordening, $Q = (I, E) = (\{V_i\}_{i=1}^r, E)$ en $R(Q) = (\{V_i\}_{i=1}^r, \{x_h\})$. Door het toepassen van Constructie 1 krijgen we een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ met representatie $\rho : \oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i) \to \mathrm{End}(\oplus_{i=1}^r m_i V_i)$.
Stel dat $x_{ij} \in \{x_h\}$ voor een pijl $(i, j) \in E$. Dan per constructie is $D_{ij} = x_{ij}$ en $D_{ji} = x_{ij}^*$. Wanneer we de pijl $(ij) \in E$ zouden vervangen door pijl (j, i) en daarbij $x_{ij} \in \{x_h\}$ zouden vervangen voor x_{ij}^* ('omkering van pijl $(i.j)$ met pijl representatie' genoemd), geeft deze omkering een quiver combinatie met ordening $(Q', R'(Q'), s)$. Waar Q gelijk is aan Q', behalve pijl $(i.j)$ (is omgekeerd). En $R(Q)$ is gelijk aan $R'(Q')$, behalve voor de pijlrepresentatie x_{ij} (pijl (i, j) komt niet voor in Q'), die is in $R'(Q')$ vervangen voor pijl representatie x_{ij}^* van pijl (j, i). Door Constructie 1 toe te passen op $(Q', R'(Q'), s)$ krijgen we het eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, \widetilde{D})$. Maar $D = \widetilde{D}$, want

$$\widetilde{D}_{ji} = x_{ij}^* = D_{ji} \text{ en } \widetilde{D}_{ij} = (x_{ij}^*)^* = x_{ij} = D_{ij} \text{ en } \widetilde{D}_{kl} = x_{kl} = D_{kl} \ \forall (k, l) \notin \{(i.j), (j, i)\}$$

Dus $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D) = (\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, \widetilde{D})$.

Deze bewerking van het 'omkeren van pijlen met pijlrepresentaties' is achter elkaar uit te voeren en levert steeds gelijke eindige spectrale tripels op. Het omkeren van pijlen met pijlrepresentaties is associatief en commutatief, en het twee keer omkeren van eenzelfde pijl met pijlrepresentatie levert de oorspronkelijke pijl met pijlrepresentatie op.
Zo kunnen we een $(Q, R(Q), s)$, die een $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ geeft, zodanig aanpassen dat er alleen nog pijlen $(i, j) \in E$ met bijhorende pijlrepresentaties $x_{ij} \in \{x_h\}$ voorkomen

waarvoor $i \leq j$. Dit levert een unitair equivalent eindig spectraal tripel op wanneer we opnieuw Constructie 1 toepassen.

Door bases te kiezen voor $V_1, \ldots, V_r$ zijn alle x_{ij} $(i \leq j)$ als matrices $M_{x_{ij}}$ schrijven ten opzichte van deze bases. De transformatie D is dan ook te schrijven als matrix M_D en we kunnen direct de benedendriehoeksvorm inclusief blokdiagonaal van M_D invullen met de matrices $M_{x_{ij}}$ $(i \leq j)$. De bovendriehoeksvorm wordt gegeven door de matrices $M^*_{x_{ij}}$ $(i \leq j)$. Dit kan van praktisch nut zijn.

Opmerking 6.13 (Isomorfe quiver representaties)**.** Zij $(Q, R(Q), s)$ een quiver combinatie met ordening, $Q = (I, E) = (\{V_i\}_{i=1}^r, E)$ en $R(Q) = (\{V_i\}_{i=1}^r, \{x_h\})$. Door het toepassen van Constructie 1 krijgen we een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ met representatie ρ.

Stel $\Omega : \{V_i\} \to \{W_j\}$ is een isomorfisme van quiver representaties $R(Q)$ en $R'(Q) = (\{W_j\}, \{y_h\})$. Dan is elke $\Omega_i : V_i \to W_i$ een unitaire afbeelding zodanig dat $y_h = \Omega_{h''} \circ x_h \circ \Omega^*_{h'}$ $\forall h \in E$. Bekijk $(Q, R'(Q), s)$ en pas daar Constructie 1 op toe. Zo krijgen we een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(W_i), \oplus_{i=1}^r m_i W_i, \widetilde{D})$ met representatie $\widetilde{\rho} : \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(W_i) \to \operatorname{End}(\oplus_{i=1}^r m_i W_i)$. Dan geldt voor elke $\widetilde{D}_{ij}$ dat $\widetilde{D}_{ij} = \Omega_j D_{ij} \Omega^*_i$.
Definieer

$$\begin{array}{llcl} u: & \oplus_{i=1}^r m_i V_i & \to & \oplus_{i=1}^r m_i W_i \\ & (v_1^1, \ldots, v_{m_1}^1, \ldots, v_1^r, \ldots, v_{m_r}^r) & \mapsto & (\Omega_1(v_1^1), \ldots, \Omega_1(v_{m_1}^1), \ldots, \Omega_r(v_1^r), \ldots, \Omega_r(v_{m_r}^r)), \\ & & & \\ \phi: & \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i) & \to & \oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(W_i) \\ & (f_1, \ldots, f_r)(w) & \mapsto & (\Omega_1, \ldots, \Omega_r) \circ (f_1, \ldots, f_r) \circ (\Omega_1, \ldots, \Omega_r)^*. \end{array}$$

De afbeelding u is unitair, want elke Ω_i is unitair. De afbeelding ϕ is een isomorfisme van algebra's waarvoor

$$\widetilde{\rho}\phi(f_1, \ldots, f_r) = u \circ \rho(f_1, \ldots, f_r) \circ u^* \ \forall (f_1, \ldots, f_r) \in \oplus_{i=1}^r m_i V_i.$$

Omdat $\widetilde{D}_{ij} = \Omega_j D_{ij} \Omega^*_i$ $\forall i, j \in \{1, \ldots, r\}$, geldt $\widetilde{D} = uDu^*$.
Dus $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D) \sim (\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(W_i), \oplus_{i=1}^r m_i W_i, \widetilde{D})$.

Opmerking 6.14. Bekijk een $(Q, R(Q), s)$. Door Constructie 1 toe te passen verkrijgen we een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$. Een eindige combinatie van de drie bovenstaande bewerkingen 'permutatie ordening', 'omkering van pijlen met pijlrepresenties' en 'isomorfe quiver representaties' is toe te passen op $(Q, R(Q), s)$ en levert een $(Q', R'(Q'), s')$ op. Het eindige spectrale tripel dat we krijgen door Constructie 1 toe te passen op $(Q', R'(Q'), s')$ is dan unitair equivalent aan $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$.

Definitie 6.15 (Unitaire equivalentie van quiver combinaties met ordening)**.** Zij $(Q_1, R_1(Q_1), s_1)$, $(Q_2, R_2(Q_2), s_2)$ twee quiver combinaties met ordening. Dan heet $(Q_1, R_1(Q_1), s_1)$ *unitair equivalent* aan $(Q_2, R_2(Q_2), s_2)$, en schrijven $(Q_1, R_1(Q_1), s_1) \sim (Q_2, R_2(Q_2), s_2)$, als er een $(Q'_1, R'_1(Q'_1))$ bestaat waarvoor geldt:

1. $(Q'_1, R'_1(Q'_1))$ is te verkrijgen uit $(Q_1, R(Q_1))$ door het toepassen van 'omkeren van pijlen met pijlrepresentaties' (zoals beschreven in Opmerking 6.12),

2. $Q'_1 = Q_2$, en

3. $R'_1(Q'_1) \cong R_2(Q_2)$ (als quiver representaties).

Propositie 6.16. *De relatie $\sim$ 'unitaire equivalentie' voor quiver combinaties met ordening, zoals gedefinieerd in Definitie 6.15, is een equivalentie relatie.*

Bewijs. *(reflexief)* Zij gegeven $(Q_1, R_1(Q_1), s_1)$, dan duidelijk $(Q_1, R_1(Q_1), s_1) \sim (Q_1, R_1(Q_1), s_1)$ door geen enkele pijl om te draaien en de identiteitsfunctie op de representatie $R_1(Q_1)$ toe te passen.

(symmetrisch) Stel $(Q_1, R_1(Q_1), s_1) \sim (Q_2, R_2(Q_2), s_2)$. Dan bestaat er een $(Q_1', R_1'(Q_1'))$ die voldoet aan de eigenschappen zoals gedefinieerd in Definitie 6.15. Merk op, omdat $Q_1' = Q_2$, geldt dat het aantal knopen en aantal pijlen gelijk is. Zeg dat het aantal knopen van Q_1' is r en het aantal pijlen is t, dan heeft Q_1 ook r knopen en t pijlen.
Stel dat er $q \leq t$ pijlen $h_1, \ldots, h_q$ uit Q_1 zijn omgekeerd om Q_1' te krijgen. Dan zijn daarbij ook de bijhorende pijl representaties $x_{h_1}, \ldots, x_{h_q}$ uit $R(Q_1)$ 'omgekeerd', dat wil zeggen dat voor elke $i \in \{1, \ldots, q\}$: de pijl $h_i = (h_i', h_i'')$ met bijhorende pijl representatie $x_{h_i} : m_{h_i'} V_{h_i'} \to m_{h_i''} V_{h_i''}$ is vervangen door een pijl $\widetilde{h}_i := (h_i'', h_i')$ met bijhorende pijl representatie $\widetilde{x}_{\widetilde{h}_i} : m_{h_i''} V_{h_i''} \to m_{h_i'} V_{h_i'}$, waar $\widetilde{x}_{\widetilde{h}_i} := x_{h_i}^*$. Korter: voor elke $i \in \{1, \ldots, q\}$ is de pijl h_i met bijhorende pijl representatie x_{h_i}, geschreven als $(h_i, x_{h_i}) = ((h_i', h_i''), x_{h_i})$, vervangen door $(\widetilde{h}_i, \widetilde{x}_{\widetilde{h}_i}) := ((h_i'', h_i'), x_{h_i}^*)$.

Maak $(Q_2', R_2'(Q_2'), s_2)$ door, voor elke $i \in \{1, \ldots, q\}$, de pijl $\widetilde{h}_i = (\widetilde{h}_i', \widetilde{h}_i'') = (h_i'', h_i')$ uit Q_2 met pijl representatie $y_{\widetilde{h}_i}$ uit $R_2(Q_2)$, te vervangen door pijl $\widehat{h}_i := (\widetilde{h}_i'', \widetilde{h}_i') = (h_i', h_i'') = h_i$ met pijlrepresentatie $\widehat{y}_{h_i} := (y_{\widetilde{h}_i})^*$ (omkering van pijlen met pijlrepresentaties). Dan is duidelijk $Q_2' = Q_1$, want elke pijl uit Q_1 die was omgekeerd om $Q_1' = Q_2$ te krijgen is nu nogmaals omgekeerd om Q_2' te krijgen, en dus weer in zijn oorspronkelijke stand staat.

Nog te bewijzen: $R_1(Q_1) \cong R_2'(Q_2')$ (als quiver representaties).
Bewijs. Schrijf $R_1(Q_1) = (\{V_i^1\}, \{x_h^1\}), R_1'(Q_1') = (\{V_i^{1'}\}, \{x_g^{1'}\}), R_2(Q_2) = (\{V_i^2\}, \{y_g^2\})$ en $R_2'(Q_2') = (\{V_i^{2'}\}, \{y_h^{2'}\})$. Merk op dat bij het omdraaien van pijlen met pijlrepresentaties de representaties van de knopen gelijk blijven. Dus voor elke knoop α geldt $V_\alpha^1 = V_\alpha^{1'} \cong V_\alpha^2 = V_\alpha^{2'}$. Bekijk een $y_h^{2'} \in \{y_h^{2'}\}$ (representatie van een pijl h uit Q_2' $(= Q_1)$). Dan is h verkregen uit een pijl g uit Q_2 $(= Q_1')$ doordat g is omgekeerd of gelijk is gebleven.
Stel dat $h = g$ (dus gelijk gebleven), dan $y_h^{2'} = y_g^2$. Net zo is dan $x_h^1 = x_g^{1'}$. Omdat er een isomorfisme van quiver representaties $\phi : \{V_i^{1'}\} \xrightarrow{\cong} \{V_i^2\}$ bestaat, geldt

$$y_h^{2'} = y_g^2 = \phi_{g''} \circ x_g^{1'} \circ \phi_{g'}^* = \phi_{h''} \circ x_h^1 \circ \phi_{h'}^*.$$

Stel dat h de omkering is van g, dan $y_h^{2'} = (y_g^2)^*$ en $x_g^{1'} = (x_h^1)^*$. Dan

$$y_h^{2'} = (y_g^2)^* = (\phi_{g''} \circ x_g^{1'} \circ \phi_{g'}^*)^* = \phi_{g'} \circ (x_g^{1'})^* \circ \phi_{g''}^* = \phi_{h''} \circ x_h^1 \circ \phi_{h'}^*.$$

De pijl h was willekeurig, dus ϕ is een isomorfisme van quivers representatie $R_1(Q_1)$ en $R_2'(Q_2')$.
Dus $(Q_2, R_2(Q_2), s_2) \sim (Q_1, R_1(Q_1), s_1)$.

(transitief) Stel $(Q_1, R_1(Q_1), s_1) \sim (Q_2, R_2(Q_2), s_2)$ en $(Q_2, R_2(Q_2), s_2) \sim (Q_3, R_3(Q_3), s_3)$. Dan bestaat er een $(Q_1', R_1'(Q_1'))$ waarvoor geldt dat $(Q_1', R_1'(Q_1'))$ verkregen is uit $(Q_1, R_1(Q_1))$ door het omkeren van pijlen met pijlrepresentaties zodanig dat $Q_1' = Q_2$. Net zo bestaat er een $(Q_2', R_1'(Q_2'))$ waarvoor geldt dat $(Q_2', R_2'(Q_2'))$ verkregen is uit $(Q_2, R_2(Q_2))$ door het omkeren van pijlen met pijlrepresentaties zodanig dat $Q_2' = Q_3$. Schrijf $R_1(Q_1) = (\{V_i^1\}, \{x_g^1\}), R_1'(Q_1') = (\{V_i^{1'}\}, \{x_h^{1'}\})$,
$R_2(Q_2) = (\{V_i^2\}, \{y_h^2\}), R_2'(Q_2') = (\{V_i^{2'}\}, \{y_k^{2'}\})$ en $R_3(Q_3) = (\{V_i^3\}, \{z_k^3\})$. Dan zijn er isomorfismen van quiver representaties $\phi : \{V_i^{1'}\} \xrightarrow{\cong} \{V_i^2\}$ en $\gamma : \{V_i^{2'}\} \xrightarrow{\cong} \{V_i^3\}$.

De afbeeldingen ϕ en γ zijn een collectie unitaire afbeeldingen $\phi_i : V_i^{1'} \to V_i^2$ en $\gamma_i : V_i^{2'} \to V_i^3$. De samenstelling $\gamma_i \circ \phi_i : V_i^{1'} \to V_i^3$ is dan ook een unitaire afbeelding. Om van Q_1 naar $Q_1' = Q_2$ te komen zijn een eindig aantal pijlen met pijl representaties omgekeerd (noem deze actie a_1), net zo om van Q_2 naar $Q_2' = Q_3$ te komen (noem deze actie a_2). Deze omkeringen van pijlen met pijl representaties zijn ook achter elkaar uit te voeren, $a_2 \circ a_1$, om zo in één keer van Q_1 naar Q_2' te gaan. Schrijf $\widetilde{R}(Q_2') = \widetilde{R}(Q_3) = (\{\widetilde{V}_i\}, \{p_k\})$ voor de quiver representatie die we krijgen door het toepassen van $a_2 \circ a_1$ op $(Q_1, R_1(Q_1))$. Merk op dat voor elke knoop α uit Q_3, de knoop representatie $\widetilde{V}_\alpha$ uit $\widetilde{R}(Q_3)$ gelijk is aan de knoop representatie V_α^1 uit $R_1(Q_1)$. Er zijn immers alleen pijlen met representaties omgekeerd om van $(Q_1, R_1(Q_1))$ naar $(Q_3, \widetilde{R}(Q_3))$ te komen. Dus $\widetilde{R}(Q_3) = (\{V_i^1\}, \{p_k\})$. Door het volledig uitschrijven, zoals gedaan bij het bewijs van (symmetrisch), is na te gaan dat $\widetilde{R}(Q_3) \cong R(Q_3)$. Het isomorfisme $\psi : \{V_i^1\} \to \{U_i\}$ van de quiver representaties $\widetilde{R}(Q_3)$ en $R_3(Q_3)$ wordt gegeven door de unitaire afbeeldingen $\psi_i := \gamma_i \circ \phi_i : V_i^1 \to V_i^3$. Opzet voor een dergelijke uitwerking:

Bekijk een pijl $k = (k', k'')$ uit Q_3 met representatie $p_k : m_{k'} V_{k'} \to m_{k''} V_{k''}$ uit $\widetilde{R}(Q_3)$. Dan zijn er twee gevallen te onderscheiden:
(a) De pijl k is gelijk aan een pijl g in Q_1.
(b) De pijl k is een omkering van een pijl g in Q_1.

Stel geval (a). Dan geldt $p_k = x_k^1 = x_g^1$, waar x_g^1 in $R_1(Q_1)$ de representatie van pijl $g = k$ is. Vervolgens zijn weer twee gevallen te onderscheiden:
(i) De pijl g met pijlrepresentatie x_g^1 is zowel onder a_1 als a_2 gelijk gebleven.
(ii) De pijl g met pijlrepresentatie x_g^1 is onder a_1 omgekeerd en onder a_2 nog eens omgekeerd.

Stel geval (b). Dan geldt $p_k = (x_g^1)^*$, waar x_g^1 in $R_1(Q_1)$ de representatie van pijl g is. Vervolgens zijn weer twee gevallen te onderscheiden:
(i) De pijl g met pijlrepresentatie x_g^1 is onder a_1 omgekeerd en vervolgens onder a_2 gelijk gebleven.
(ii) De pijl g met pijlrepresentatie x_g^1 is onder a_1 gelijk gebleven en vervolgens onder a_2 omgekeerd.

Een bewijs van (b)(ii) ter illustratie. De andere gevallen gaan op soortgelijke wijze. Stel (b)(ii) geldt. Dan $p_k = (x_g^1)^*$. Pas a_1 toe op g en noem deze pijl h. Dan $g = h$ in Q_1' (de pijl is gelijk gebleven). Zij $x_h^{1'}$ in $R_1'(Q_1')$ de representatie van pijl h. Dan geldt $x_h^{1'} = x_g^1 = x_h^1$. Bekijk nu pijl h in Q_2 met representatie y_h^2 in $R_2(Q_2)$. Dan $y_h^2 = \phi_{h''} \circ x_h^{1'} \circ \phi_{h'}^* = \phi_{g''} \circ x_g^1 \circ \phi_{g'}^*$. Onder a_2 wordt pijl h omgekeerd. Noem de omgekeerde pijl: k, welke zich bevindt in Q_2' $(= Q_3)$. Voor representatie $y_k^{2'}$ in $R_2'(Q_2')$ van pijl k geldt $y_k^{2'} = (y_h^2)^* = (y_g^2)^*$. Zij z_k^3 in $R_3(Q_3)$ de representatie van pijl k, dan

$$z_k^3 = \gamma_{h'} \circ (y_h^2)^* \circ \gamma_{h''}^* = \gamma_{g'} \circ (\phi_{g''} \circ x_g^1 \circ \phi_{g'}^*)^* \circ \gamma_{g''}^* = (\gamma_{g'} \circ \phi_{g'}) \circ (x_g^1)^* \circ (\gamma_{g''} \circ \phi_{g''})^* = \psi_{k''} \circ p_k \circ \psi_{k'}^*.$$

De andere gevallen gaan op soortgelijke wijze.
Dus $\widetilde{R}(Q_2')) \cong R(Q_3)$ en dus $(Q_1, R_1(Q_1), s_1) \sim (Q_3, R_3(Q_3), s_3)$. Bewezen dat $\sim$ 'unitaire equivalentie' voor quiver combinaties met ordening een equivalentie relatie is. □

Opmerking 6.17. Het is nu mogelijk om te spreken over de nevenklasse van een $(Q, R(Q), s)$ modulo unitaire equivalentie. Eerder konden we ook al spreken over de nevenklasse van een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ modulo unitaire equivalentie. Het blijkt dat er een één-op-één verband bestaat tussen de nevenklassen van quiver combinaties met ordening en de nevenklassen van eindige spectrale tripels modulo unitaire equivalent. Dit verband wordt gegeven door Constructie 1 en Constructie 2.

Stelling 6.18. *Er bestaat een één-op-één verband tussen de nevenklassen van eindige spectrale tripels modulo unitaire equivalentie en de nevenklassen van quiver combinaties met ordening modulo unitaire equivalentie.*

Bewijs. Eerst zullen drie verbanden tussen bewerkingen op quiver combinaties en op bijhorende eindige spectrale tripels worden aangetoond ((i), (ii), (iii)). Daarna volgt de afronding van het bewijs (iv).

(i) Bekijk een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$, met volgorde $s = (1,\dots,r)$ gegeven door de sommanden $m_1V_1,\dots,m_rV_r$ uit de directe som $\oplus_{i=1}^r m_iV_i$. Zij $(Q, R(Q), s)$ de quiver combinatie met ordening welke verkregen is uit $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_iV_i, D)$ door Constructie 2 toe te passen.

Stel nu dat we een permutatie σ op de volgorde s van $\oplus_{i=1}^r m_iV_i$ toepassen. Dan levert dat een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_{\sigma(i)}), \oplus_{i=1}^r m_{\sigma(i)}V_{\sigma(i)}, \widetilde{D}) \sim (\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_iV_i, D)$ op, waar $\widetilde{D}$ wordt gegeven door de afbeeldingen $\widetilde{D}_{\sigma(i)\sigma(j)} = D_{\sigma(i)\sigma(j)}\ \forall i,j \in \{1,\dots,r\}$. Pas Constructie 2 toe op $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_{\sigma(i)}), \oplus_{i=1}^r m_{\sigma(i)}V_{\sigma(i)}, \widetilde{D})$ en zij $(Q', R'(Q'), \sigma(s))$ de quiver combinatie met ordening die zo verkregen wordt. Dan $(Q, R(Q), s) \sim (Q', R'(Q'), \sigma(s))$. Dit is op de volgende manier in te zien.

Bekijk eerst de knopen uit Q'. Deze zijn gelijk aan de knopen uit Q, want we hebben ze geconstrueerd aan de hand van dezelfde m_kV_k's, maar in een andere volgorde $\sigma(s)$. Waar in Q een pijl (i,j) is gecreëerd wanneer $i \leq j$, is dat in Q' gedaan wanneer $\sigma(i) \leq \sigma(j)$. Dus Q' verschilt van Q door een omkering van een eindig aantal pijlen.
Stel $(\sigma(i), \sigma(j))$ is een pijl in Q' met representatie $y_{\sigma(i)\sigma(j)} = \widetilde{D}_{\sigma(i)\sigma(j)} = D_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Als ook $(\sigma(i), \sigma(j))$ een pijl in Q, dan heeft deze pijl als representatie $x_{\sigma(i)\sigma(j)} = D_{\sigma(i)\sigma(j)} = y_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Als $(\sigma(i), \sigma(j))$ geen pijl in Q, dan wel $(\sigma(j), \sigma(i))$ een pijl in Q met representatie $x_{\sigma(j)\sigma(i)} = D^*_{\sigma(i)\sigma(j)} = y^*_{\sigma(i)\sigma(j)}$.
Kortom, we kunnen door het omkeren van pijlen met pijlrepresentaties $(Q', R'(Q'))$ verkrijgen uit $(Q, R(Q))$. Dus $(Q, R(Q), s) \sim (Q', R'(Q'), \sigma(s))$.

Andersom, wanneer twee quiver combinaties enkel verschillen in hun ordening geven ze, na het toepassen van Constructie 1, twee unitair equivalente eindige spectrale tripels die enkel verschillen in permutatie van sommanden (en daarbij aangepast de Hermitese afbeelding D) (zie Opmerking 6.11).

Het permuteren van de sommanden van een eindig spectraal tripels zoals hierboven beschreven komt (vrijwel) overeen met het permuteren van de ordening op een quiver combinatie. Een permutatie van de ordening van een quiver combinatie vertaalt zich via Constructie 1 precies in dezelfde permutatie van de sommanden van het verkregen eindig spectraal tripel. Andersom vertaalt een permutatie van de sommanden van een eindig spectraal tripel zich via Constructie 2 in precies dezelfde permutatie van de ordening van de bijhorende quiver combinatie, maar eventueel ook nog in een verschil door omkering van pijlen met pijlrepresentaties.

(ii) Bekijk een $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_iV_i, D)$, met representatie ρ, volgorde $s = (1,\dots,r)$ gegeven door de sommanden en zij $(Q, R(Q), s)$, met $Q = (\{[i, m_i]\}_{i=1}^r, E)$ en $R(Q) = (\{V_i\}_{i=1}^r, \{x_h\})$ de quiver combinatie met ordening die door Constructie 2 is verkregen.

Stel dat er een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(W_i), \oplus_{i=1}^r m_iW_i, \widetilde{D})$ bestaat met representatie $\widetilde{\rho}$ en volgorde s, waarvoor $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_iV_i, D) \sim (\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(W_i), \oplus_{i=1}^r m_iW_i, \widetilde{D})$. Deze unitaire equivalentie wordt gegeven door een unitaire afbeelding $u : \oplus_{i=1}^r m_iV_i \xrightarrow{\cong} \oplus_{i=1}^r m_iW_i$, welke gegeven is door unitaire afbeeldingen $u_i : V_i \xrightarrow{\cong} W_i$. Dan $\widetilde{D}_{ij} = u_jD_{ij}u_i^*\ \forall i,j \in \{1,\dots,r\}$.
Door Constructie 2 toe te passen op $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_iV_i, D)$ krijgen we een quiver combi-

natie met ordening $(Q', R'(Q'), s)$, waar $Q' = (\{[i, m_i]\}_{i=1}^r, E) = Q$ en $R(Q) = (\{W_i\}_{i=1}^r, \{y_h\})$. Zij (i, j) een pijl in $Q = Q'$, dan $y_{ij} = \widetilde{D}_{ij} = u_j D_{ij} u_i^* = u_j x_{ij} u_i^*$. Dus is de collectie van unitaire afbeeldingen $\{u_i\}$ een isomorfisme tussen de quiver representaties $R(Q)$ en $R'(Q')$. En dus $(Q, R(Q), s) \sim (Q', R'(Q'), s)$.

Andersom, wanneer twee quiver combinaties met ordening enkel verschillen door een isomorfisme van hun quiver representaties, dan zijn ze unitair equivalent en zijn de eindige spectrale tripels, die via Constructie 2 te verkrijgen zijn, ook unitair equivalent. De unitaire afbeelding tussen deze verkregen tripels wordt dan precies gegeven door het isomorfisme van de quiver representaties (zie Opmerking 6.13).

(iii) Bekijk nogmaals een $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$, met representatie ρ, volgorde $s = (1, \dots, r)$ gegeven door de sommanden en zij $(Q, R(Q), s)$, met $Q = (\{[i, m_i]\}_{i=1}^r, E)$ en $R(Q) = (\{V_i\}_{i=1}^r, \{x_h\})$ de quiver combinatie met ordening die door Constructie 2 is verkregen.
Herinner dat D volledig vast ligt wanneer we voor elk paar (i, j) met $i, j \in \{1, \dots, r\}$ de afbeelding D_{ij} òf D_{ji} definiëren. Kies een $(Q', R'(Q'), s)$, die enkel verschilt van $(Q, R(Q), s)$ door het omkeren van één pijl (i, j) met pijlrepresentatie x_{ij}. Dan geeft Constructie 1 toegepast op $(Q', R'(Q'), s)$ weer $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$. Er is echter een subtiel verschil in hoe D tot stand komt vanuit deze twee verschillende quiver combinaties met gelijke ordening. Bekijk eerst $(Q, R(Q), s)$. In Constructie 1 definiëren we $D_{ij} := x_{ij}$ door x_{ij} af te lezen. Dan $D_{ji} := D_{ij}^*$. Bekijk $(Q', R'(Q'), s)$. De quiver Q' bevat pijl (j, i) in plaats van (i, j). Zij y_{ji} de pijlrepresentatie van (j, i) die gedefinieerd is als $y_{ji} := x_{ij}^*$. In Constructie 1 wordt nu eerst $D_{ji} := y_{ji}$ gedefinieerd en vervolgens kan pas $D_{ij} := y_{ji}^* = x_{ij}$ worden gedefinieerd. Dit verschil in hoe D wordt gedefinieerd vanuit een quiver combinatie me ordening komt overeen met de richting van de pijlen in de quiver. Waar het omkeren van pijlen met pijlrepresentaties wel te zien is bij quiver combinaties met ordening, is dat niet terug te zien in de eindige spectrale tripels die te krijgen zijn door Constructie 1 toe te passen.

Zij $(\oplus_{i=1}^r \mathrm{End}\,(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D) \sim (\oplus_{j=1}^r \mathrm{End}\,(W_j), \oplus_{j=1}^r m_j W_j, \widetilde{D})$, twee unitair equivalente eindige spectrale tripels, dan verschillen deze tripels in een permutatie van de sommanden en zijn de inproductruimten V_i en W_j één op één isomorfe representaties (zie Opmerking 5.8). Uit (i) en (ii) volgt dan dat de quiver combinaties met ordening, die we krijgen door Constructie 2 toe te passen op beide tripels, unitair isomorf zijn.

Andersom, zij $(Q, R(Q), s) \sim (Q', R'(Q'), s')$, dan verschillen deze quiver combinaties door een combinatie van een omkering van een eindig aantal pijlen met pijlrepresentaties, een isomorfisme tussen de quiver representaties en eventueel een permutatie van de ordening. Uit (i), (ii) en (iii) volgt dan dat de eindige spectrale tripels, die we krijgen door Constructie 1 toe te passen op beide quiver combinaties met ordening, unitair equivalent zijn.

Dus er bestaat een één-op-één verband tussen de nevenklassen van eindige spectrale tripels modulo unitaire equivalentie en de nevenklassen van quiver combinaties met ordening modulo unitaire equivalentie. Dit verband wordt gegeven door Constructie 1 en Constructie 2. □

Opmerking 6.19. Omdat quiver combinaties die enkel verschillen in ordening binnen dezelfde nevenklasse vallen, kunnen we de nevenklasse van een $(Q, R(Q), s)$ representeren door enkel $(Q, R(Q))$. We kunnen zo ook unitaire equivalentie op quiver combinaties definiëren:

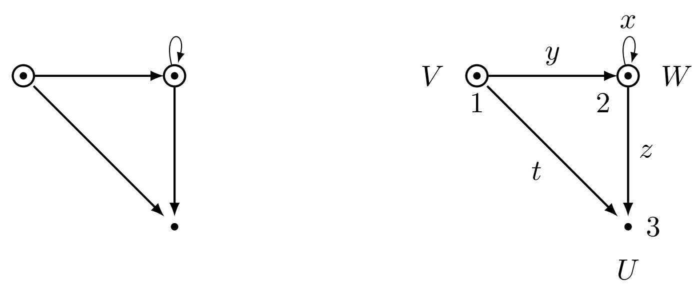
Definitie 6.20 (Unitaire equivalentie van quiver combinaties)**.** Twee quiver combinaties $(Q, R(Q))$ en $(Q', R'(Q'))$ heten *unitair equivalent*, en schrijven $(Q, R(Q)) \sim (Q', R'(Q'))$, wanneer er een ordening s bestaat zodanig dat $(Q, R(Q), s) \sim (Q', R'(Q'), s)$.

Gevolg 6.21. *Er bestaat een één-op-één verband tussen de nevenklassen van eindige spectrale tripels modulo unitaire equivalentie en de nevenklassen van quiver combinaties modulo unitaire equivalentie.*

Bewijs. Bekijk de nevenklasse van een $(Q, R(Q))$ modulo unitaire equivalentie. Deze komt uniek overeen met de nevenklasse van $(Q, R(Q), s)$ modulo unitaire equivalentie (voor een willekeurige ordening s). Volgens Stelling 6.18 komt de nevenklasse van $(Q, R(Q), s)$ modulo unitaire equivalentie uniek overeen met een nevenklasse van eindige spectrale tripels modulo unitaire equivalentie. $\square$

Door het toekennen van een representatie $R(Q)$ aan een gegeven quiver Q krijgen we, via Constructie 1, een nevenklasse van eindige spectrale tripels modulo unitaire equivalentie.

Voorbeeld 6.22. Quiver Q (links) met toegekende representatie $R(Q)$ (rechts):



De quiver combinatie $(Q, R(Q))$ geeft de nevenklasse van het eindig spectraal tripel: $(\mathrm{End}(V) \oplus \mathrm{End}(W) \oplus \mathrm{End}(U), 2V \oplus 2W \oplus U, D)$.
Merk op, dat om dit tripel op te schrijven een ordening is gekozen (aangegeven door getallen bij de knopen). Met deze ordening is D gedefinieerd als:
$D_{22} := x, D_{12} := y, D_{23} := z, D_{13} := t, D_{11} := 0, D_{33} := 0, D_{21} := y^*, D_{32} := z^*, D_{31} := t^*$.

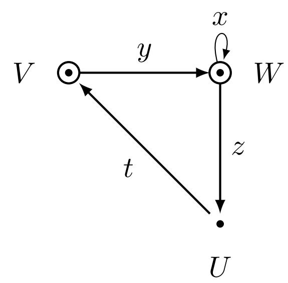
Definitie 6.23 (Topologische ordening)**.** Zij Q een quiver met r knopen. Een ordening $1, \ldots, r$ op de knopen van Q heet een *topologische ordening*, als voor elke pijl (i, j) in Q geldt dat $i \leq j$.

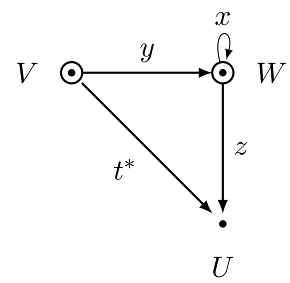
Opmerking 6.24. Wanneer we naar de nevenklasse van een $(Q, R(Q))$ modulo unitaire equivalentie kijken, kunnen we altijd een representant $(Q', R'(Q'))$ uit de nevenklasse van $(Q, R(Q))$ vinden waarvoor een topologische ordening bestaat. Dit is te bereiken door het omkeren van pijlen met pijlrepresentaties. Quiver combinaties met deze eigenschap hebben met name praktisch nut zoals eerder aangegeven in Opmerking 6.12. Stel dat we ons beperken tot alleen nog quiver combinaties waarvoor een topologische ordening bestaat, dan bereiken we nog steeds alle nevenklassen van quiver combinaties modulo unitaire equivalentie. Stel nu dat er voor een quiver combinatie verschillende topologische ordeningen heeft, dan zijn de quiver combinaties met deze verschillende ordeningen allen unitair equivalent. We kunnen ons dus zelfs beperken tot enkel quiver combinaties waarbij we weten dat er zo'n ordening bestaat, maar deze niet expliciet is gegeven. Vanaf nu nemen we aan:

We kiezen standaard een representant $(Q, R(Q))$ van een nevenklasse van quiver combinaties modulo unitaire equivalentie, waarvoor een topologische ordening bestaat.

Merk op dat Constructie 2 altijd een quiver combinatie geeft die hier aan voldoet (en zelfs expliciet de ordening geeft).

Voorbeeld 6.25. Twee quivers met quiver representaties $(Q', R'(Q'))$ (links) en $(Q, R(Q))$ (rechts):





Voor Q' bestaat geen topologische ordening op de knopen, want bevat een cykel. Voor Q bestaat wel een topologische ordening en omdat Q en Q' enkel verschillen in het omkeren van een pijl met pijlrepresentatie vallen ze binnen dezelfde nevenklasse modulo unitaire equivalentie.

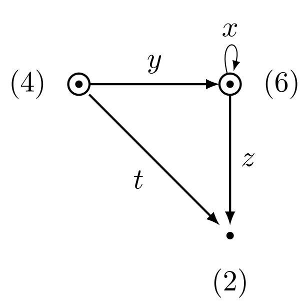
6.2 $\mathbb{C}^n$ quiver combinaties

Zij $(Q, R(Q))$ een quiver combinatie, waar $Q = (\{[i, m_i]\}_{i=1}^r, E)$ en $R(Q) = (\{V_i\}_{i=1}^r, \{x_h\})$. Dan via Constructie 1 geeft dit een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$, waar D gedefinieerd is door de pijlrepresentaties x_h. De nevenklasse van $(Q, R(Q))$ modulo unitaire equivalentie komt uniek overeen met de nevenklasse van $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$ modulo unitaire equivalentie.

Definieer voor elke $i :\ d_i := \dim(V_i)$. Volgens Propositie 2.14 bestaat er dan voor elke i een unitaire afbeelding $u_i : V_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^{d_i}$, met standaardbasis en standaard inproduct op $\mathbb{C}^{d_i}$. Dan geeft deze collectie van unitaire afbeeldingen $\{u_i\}_{i=1}^r$ een unitair equivalente quiver combinatie $(Q, R'(Q))$, waar alle knooprepresentaties in $R'(Q)$ van de vorm $\mathbb{C}^{d_i}$ zijn. Net zo geeft deze collectie $\{u_i\}_{i=1}^r$ een eindig spectraal tripel $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(\mathbb{C}^{d_i}), \oplus_{i=1}^r m_i \mathbb{C}^{d_i}, \widetilde{D})$ welke unitair equivalent is aan $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$.
Dus $(Q, R'(Q))$ is bevat in de nevenklasse van $(Q, R(Q))$. Deze nevenklasse komt uniek overeen met de nevenklasse van $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(V_i), \oplus_{i=1}^r m_i V_i, D)$, waarin $(\oplus_{i=1}^r \operatorname{End}(\mathbb{C}^{d_i}), \oplus_{i=1}^r m_i \mathbb{C}^{d_i}, \widetilde{D})$ bevat is.

We kunnen ons dus beperken tot enkel quiver combinaties $(Q, R_{\mathbb{C}}(Q))$ waarin aan elke knoop $[i, m_i]$ een complexe inproductruimte $\mathbb{C}^{d_i}$ met standaardbasis en standaard inproduct is toegekend (voor bepaalde $d_i \in \mathbb{N}$). Het is dan voldoende om enkel $d_1, \ldots, d_r$ te geven, want daarmee liggen de knooprepresentaties vast. Dit geven we in een quiver aan als (d_i) bij een knoop $[i, m_i]$.

Voorbeeld 6.26. Quiver combinatie $(Q, R_{\mathbb{C}}(Q))$:



De quiver combinatie $(Q, R_{\mathbb{C}}(Q))$ geeft de nevenklasse van

$$(\operatorname{End}(\mathbb{C}^4) \oplus \operatorname{End}(\mathbb{C}^6) \oplus \operatorname{End}(\mathbb{C}^2), 2\mathbb{C}^4 \oplus 2\mathbb{C}^6 \oplus \mathbb{C}^2, D),$$

met standaardbasis en -inproduct op elke $\mathbb{C}^{d_i}$, en waar D gedefinieerd is door (de matrices) x, y, z, t.

Referenties

[1] A. Sitarz, *Why Noncommutative Geometry?*, 1999.
http://noncommutative.tripod.com/ncgtext.htm

[2] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, ISBN 0-12-185860-X, San Diego USA 1994.
http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf

[3] A. Connes en M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives* (under revision).
http://www.alainconnes.org/docs/bookwebfinal.pdf

[4] T. Krajewski, *Classification Of Finite Spectral Triples*, Marseille 1996.
http://arxiv.org/pdf/hep-th/9701081v2.pdf

[5] W. Bosma, *Complexe Inproductruimten* (diktaat Lineaire algebra 3 en 4), Nijmegen 2009.
https://blackboard.ru.nl/@@/25DF66503FCF8E689BE51AD1702CB698/courses/1/BFCA-NP012B-9A-2009/content/_1057654_1/LA3.pdf

[6] W. Bosma, *Enkele Constructies* (diktaat Lineaire algebra 3 en 4), Nijmegen 2009.
https://blackboard.ru.nl/@@/25DF66503FCF8E689BE51AD1702CB698/courses/1/BFCA-NP012B-9A-2009/content/_1078237_1/LA4Constructies.pdf

[7] P. Skoufranis, *Direct Sum of Vector Spaces*, UCLA Los Angeles 2012.
http://www.math.ucla.edu/~pskoufra/M115A-DirectSumOfVectorSpaces.pdf

[8] P. Etingof et al, *Introduction to representation theory*, MIT Massachusetts 2011, p. 7-13, 23-27.
http://arxiv.org/pdf/0901.0827v5.pdf

[9] P. Etingof et al, *Lectures and problems in representation theory*, MIT Massachusetts 2005, p. 15-17.
http://www-math.mit.edu/~etingof/cltrunc.pdf

[10] R. Goodman en N.R. Wallach, *Algebras and Representations* (hoofdstuk 4 van *Symmetry, Representations, and Invariants*, ISBN 978-0-387-79851-6, Springer 2009), p 180.
http://www.math.ucsd.edu/~nwallach/chapter4.pdf

[11] R. Jonker, *Niet-commutatieve Meetkunde en het Standaardmodel*, UVA, Nederland 2008.
http://staff.science.uva.nl/~jdeboer/education/projects/projects/Bachelorscriptie.pdf