Radboud Universiteit Nijmegen

# Matrix-Groepen en hun Representaties

*Auteur:*
Berend Visser

*Begeleider:*
Dr. Walter van Suijlekom

1 juli 2015

IN·DEI·NOMINE·FELICITER

# Inhoudsopgave

# Introductie

Ik ben aan deze scriptie begonnen met een duidelijk doel voor ogen: Uitzoeken hoe rotatie-symmetrie in de kwantummechanica kan worden beschreven op een wiskundig correcte manier. Zoals bij wiskundigen of mathematische fysici vaak gebeurt raakte ik onderweg afgeleid door de grotere, algemenere theorie. Niettemin heb ik mijn oorspronkelijke doel ruimschoots bereikt, ook al komt het in de tekst eerder voor als een groot voorbeeld dan als het einddoel.

In mijn eerste hoofdstuk bespreek ik een deel van de theorie van matrix-Lie groepen. Deze groepen zijn interessant omdat zij vaak worden beschouwd als de symmetrieën van bepaalde systemen. Hoewel voor mijn oorspronkelijke doeleinden eigenlijk alleen de groep $SO(3)$ van rotaties van belang is, heb ik me hier niet toe beperkt. Dit geeft een rijke, interessante theorie die verder ook veel toepassingen heeft.

In het tweede hoofdstuk houd ik me bezig met representaties van groepen. Dit is de manier waarop in de natuurkunde de werking van een groep wordt beschouwd. Zo wordt bijvoorbeeld in de kwantummechanica tijds-evolutie gezien als een representatie van de groep $\mathbb{R}$. De toepassingen van deze theorie zijn overal in de natuurkunde terug te vinden, en om deze reden heb ik me ook hier niet beperkt tot één bepaald voorbeeld.

In het derde hoofdstuk werk ik mijn oorspronkelijke doel uit, dat het gebruik van de zogenaamde 'sferisch harmonische functies' in de kwantummechanica legitimeert. Ik laat hier ook zien hoe representatie-theorie een krachtig middel is bij deze analyse.

Ten slotte heb ik in mijn vierde hoofdstuk de stelling van Peter-Weyl bewezen. Deze stelling is een stuk abstracter dan de rest van mijn scriptie, en is in eerste instantie eerder wiskundig dan natuurkundig gemotiveerd. Ik bewijs echter ook een aantal voorbeelden, waaruit de enorme kracht van deze stelling ook in praktische zin blijkt. De Fourier-theorie, die zeker praktisch toepasbaar is, volgt bijvoorbeeld erg makkelijk uit deze stelling.

Nog een opmerking over benodigde voorkennis. Het liefst schrijf ik natuurlijk een tekst die voor elke lezer van het niveau van wiskunde-bachelor te volgen is, maar dit is helaas onmogelijk. Allereerst neem ik ook aan dat de lezer een kennis heeft van de basis van groepentheorie, analyse en lineaire algebra. Dit is terug te vinden in boeken als [1, 9–11].

Daar bovenop veronderstel ik een algemene (maar zeker niet diepgaande) kennis van topologie, vooral met betrekking tot metrische ruimtes. Zie hiervoor bijvoorbeeld [2,15]. Ten slotte is het voor een scriptie over mathematische fysica natuurlijk belangrijk een overzicht te hebben van functionaal-analyse, aangezien dat de context is waar de kwantumfysica zich in afspeelt. Hiervan is een niveau van bijvoorbeeld een inleidend college voldoende, zie bijvoorbeeld [4].

Als ergens in de tekst iets onduidelijk is aangaande deze basiskennis, spoor ik de lezer aan om dit voor zichzelf op te helderen in bovengenoemd of andere literatuur.

# Hoofdstuk 1

# matrix-Lie Groepen

## 1.1 Inleidende resultaten

In deze paragraaf zal ik kort de topologie van lineaire operatoren en matrices bespreken. Hoewel voor de doeleinden van deze scriptie het strikt genomen niet nodig is om verder te gaan dan het eindig-dimensionale geval, is het hier niet nodig om ons te beperken.

Ik zal in dit hoofdstuk voornamelijk de lijn van B.C. Hall volgen uit [5].

**Definitie 1.1.** Laat $V$ lineaire vectorruimte met norm zijn, en $A\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. We definiëren een norm voor $A$ door:

$$\|A\|_O = \sup_{v \in V} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in V_1} \|Av\|,$$

zolang als dit eindig is. Hier is $V_1$ de eenheidsbol in $V$.

Het feit dat de boven gedefiniëerde afbeelding ook daadwerkelijk een norm is, neem ik hier aan als een gegeven uit de functionaal-analyse, maar het is ook makkelijk te verifiëren. In oneindige dimensie is de norm van een willekeurige operator in het algemeen niet eindig. Om deze reden kijken we naar de deelverzameling

$$B(V) = \{A\colon V \to V |\ \|A\| < \infty\}.$$

Dit is de ruimte van begrensde lineaire operatoren, waarvoor de norm dus per definitie eindig is. Als $V$ een Banachruimte is, dan is $B(V)$ ook weer een Banachruimte. Ook dit neem ik als gegeven uit de functionaalanalyse.

In eindige dimensie is deze constructie niet nodig. De eenheidsbol in een eindig dimensionale vectorruimte is compact, omdat hij begrensd en gesloten is, en de norm op $V$ is per definitie een continuë afbeelding. Hieruit volgt met een standaard resultaat uit de analyse dat de norm van een afbeelding $A$ begrensd is, en dat het supremum ook daadwerkelijk door een vector in $V$ wordt aangenomen.

Een belangrijke eigenschap van de operatornorm is dat we de afschatting $\|AB\|_O \leq \|A\|_O\|B\|_O$ hebben. Om deze reden gebruik ik deze norm als standaard, en zal ik heb subscript $O$ in het vervolg vaak weglaten als er geen verwarring kan optreden.

Af en toe zal het handig zijn om afbeeldingen tussen eindig dimensionale ruimtes via hun matrix met vectoren te identificiëren. We gebruiken in dit geval de volgende norm

**Definitie 1.2.** Laat $V$ eindig dimensionale genormeerde vectorruimte zijn, en $A\colon V \to V$ een lineaire afbeelding. Als we de matrix van $A$ aangeven door $(A_{ij})$, dan definiëren we de vectornorm van $A$ door

$$\|A\|_v = \sum_{i,j} |A_{ij}|.$$

Dit is per definitie de $l^1$ norm op $\mathbb{R}^{ij}$ of $\mathbb{C}^{ij}$. We kiezen hier de matrix van een operator $A$ als de matrix ten opzichte van een (orthonormale) standaardbasis. In het algemeen is deze norm niet onafhankelijk van de gekozen basis. Zoals ik nu zal bewijzen, maakt het topologisch niet uit welke basis we gebruiken. In het algemeen zijn alle normen over eindig-dimensionale vectorruimtes equivalent, maar ik zal toch een bewijs geven van dit speciale geval.

Herinner je dat twee normen $\|\ldots\|_1$ en $\|\ldots\|_2$ op een ruimte $V$ dezelfde topologie induceren als er constanten $C_1$ en $C_2$ zijn zodat

$$C_1\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C_2\|v\|_1 \qquad \forall\, v \in V.$$

**Propositie 1.3.** *De vectornorm en de operatornorm zijn voor elke eindig-dimensionale vectorruimte $V$ equivalent.*

*Bewijs.* Zij $n = \dim(V)$ en laat $v \in V$ een willekeurige vector met lengte 1 zijn (anders kan altijd worden gehernormeerd). We kunnen deze ontbinden ten opzichte van een basis $\{e_i\}$ van $V$. Schrijf dus $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. We kunnen nu de lengte van $Av$ gaan afschatten.

$$\begin{aligned}
\|Av\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \left( \sum_{j=1}^{n} A_{ij} e_j \right) \right\| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}|\,|a_i| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{n} |A_{kj}| \right) |a_i| \\
&= \|A\|_v
\end{aligned}$$

Als we dus het supremum nemen over de eenheidsbol blijft dit ook kleiner dan $\|A\|_v$. We hebben dus aan de ene kant dat $\|A\|_0 \leq \|A\|_v$.

Voor de andere ongelijkheid, merk op dat:

$$\|A\|_0 \geq \|Ae_i\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \geq |a_{ik}|.$$

Dat wil zeggen, de operatornorm is groter dan elk afzonderlijk matrix element. Hieruit volgt dat $\|A\|_v \leq n^2 \|A\|_0$, en na delen door $n^2$ zijn we dus klaar. □

Omdat de vectornorm voor elke basiskeuze equivalent is met de operatornorm, zijn ze ook equivalent met elkaar. Het maakt dus topologisch niet uit welke basiskeuze we doen voor het vastleggen van de matrix van een operator.

Een handig resultaat waar we de vectornorm zullen gebruiken is het volgende:

**Propositie 1.4.** *De complexe diagonaliseerbare matrices liggen dicht in de ruimte van complexe $n \times n$ matrices, $M_n(\mathbb{C})$.*

We kunnen elke matrix dus willekeurig dicht benaderen met diagonaliseerbare matrices. Merk op dat de reëele $n \times n$ matrices $M_n(\mathbb{R})$ te beschouwen zijn als deelverzameling van $M_n(\mathbb{C})$, op dezelfde wijze dat $\mathbb{R}$ deelverzameling is van $\mathbb{C}$. We kunnen dus ook reële matrices benaderen met (niet per se reëele) diagonaliseerbare matrices.

*Bewijs.* Herinner je dat elke complexe matrix een Jordan-normaal vorm heeft. Dat wil zeggen dat een matrix $A$ te schrijven is als:

$$A = V \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix} V^{-1}$$

Hier zijn de $J_i$ zogenaamde Jordan blokken, in de volgende vorm:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Dat wil zeggen, $J_i$ is een matrix met $\lambda_i$ op de diagonaal, en enen op de bovendiagonaal. Hier zijn $\lambda_i$ de eigenwaarden van $A$ (niet noodzakelijk allen verschillend). Zij nu $0 < \epsilon < 1$, en zij $d' = \min_{\lambda_i \neq \lambda_j} |\lambda_i - \lambda_j|$ en ten slotte $d = \min\{d, 1\}$. We gaan een diagonaliseerbare matrix $B$ construeren die in de vectornorm dichter dan $\epsilon$ bij $A$ vandaan ligt.

Merk op dat de bollen $B_{\lambda_i}(\epsilon d/2n)$ en $B_{\lambda_j}(\epsilon d/2n)$ per constructie geen overlap hebben zolang $\lambda_i \neq \lambda_j$. We kunnen hierin dus verschillende $\lambda_{ik}$ kiezen, waarbij $k$ loopt van 1 tot de totale multipliciteit van $\lambda_i$ in $A$. Met deze constructie hebben we $n$ echt verschillende waarden gemaakt.

We maken nu een matrix $J'$ door in de Jordan-normaal vorm van $A$ elke $\lambda_i$ te vervangen door een verschillende $\lambda_{ik}$. Ten slotte maken we de matrix $B$ door

$$B = VJ'V^{-1}$$

Als we nu het karakteristieke polynoom van $B$ berekenen, zien we dat het zich compleet ontbind in factoren, omdat we alle diagonaalelementen verschillend hebben gekozen. $B$ is dus diagonaliseerbaar. Ook geldt dat in de vectornorm behorende bij de basis die $V$ maakt dat

$$\|A - B\|_v \leq \sum_{i,k} |\lambda_i - \lambda_{ik}| \leq n\frac{\epsilon d}{2n} < \epsilon$$

$\square$

## 1.2 Machtreeksen van Operatoren

Voor de analyse van matrix-Lie groepen zijn de exponent en het logaritme van een operator een belangrijk hulpmiddel. Om deze functies te definiëren gebruiken we hun machtreeks, waar we een matrix invullen in plaats van een getal. Omdat we matrices kunnen optellen en vermenigvuldigen is dit een natuurlijke manier om de functie op de ruimte van matrices te definiëren.

Herinner je dat een machtreeks een uitdrukking is van de vorm:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

en dat deze uitdrukking convergent is als $|x - x_0| < R$, waarbij $R$ de convergentiestraal is van de machtreeks (deze kan 0 of oneindig zijn). We kunnen in bovenstaande som het complexe getal vervangen door een operator $A$, en $x_0$ door $x_0 I$. Het volgende resultaat geeft een makkelijk criterium voor het convergeren van zo'n reeks.

**Lemma 1.5.** *Zij* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *een machtreeks rond* $x_0$ *met convergentiestraal* $R$. *Als* $A\colon V \to V$ *een begrensde operator is over een Banachruimte* $V$ *en* $\|A - x_0 I\| < R$, *dan convergeert* $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(A - x_0 I)^n$ *naar een begrensde operator voor* $N \to \infty$.

*Bewijs.* Herinner je dat als $V$ een Banachruimte is, dat dan ook $B(V)$ een Banachruimte is. Het is hier dus voldoende om aan te tonen dat $(S_N)$ een Cauchy-rij is, aangezien elke $S_N$ zelf een begrensde operator is.

Zij $\epsilon > 0$ en $m \leq n$, we kunnen dan afschatten:

$$\begin{aligned}\|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{k=n}^{m} a_k (A - x_0 I)^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m} \|a_n (A - x_0 I)^k)\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m} |a_n| \|A - x_0 I\|^k < \epsilon\end{aligned}$$

Als $n$ en $m$ groot genoeg gekozen worden, aangezien de machtreeks zelf een Cauchyrij is voor $|x - x_0| < R$. Omdat $B(V)$ een Banachruimte is, volgt dus dat de rij $(S_N)$ convergeert naar een begrensde operator op $V$.

□

Omdat elke eindig-dimensionale vectorruimte compleet is, en dus Banach, geldt vorige propositie dus in het bijzonder voor $n \times n$ matrices. Het blijkt dat machtreeksen continu zijn in de matrix die als argument wordt gebruikt.

**Lemma 1.6.** *Elke machtreeks* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (A - x_0 I)^n$ *van eindig-dimensionale operatoren met convergentiestaal* $R$ *is continu op zijn domein* $B_{x_0 I}(R)$.

*Bewijs.* We gebruiken hier dat optelling en vermenigvuldigen van functies continuïteit bewaart. Het bewijs hiervoor is hetzelfde als voor reëele of complexe functies. We hebben dus dat elke $S_N$ continu is. Door ons te beperken tot de gesloten bol $\overline{B_{x_0 I}(R')}$, met $R' < R$, hebben we uniforme convergentie op dit beperkte interval vanwege compactheid. Omdat uniforme convergentie continuïteit bewaart, geldt dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (A - x_0 I)^n$ continu is op elke gesloten bol in $B_{x_0 I}(R)$, en daarmee dus ook op het hele domein.

□

**Lemma 1.7.** *Laat* $A, U \colon V \to V$, *en* $U$ *inverteerbaar. Voor elke machtreeks geldt dan:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (UAU^{-1} - x_0 I)^n = U \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A - x_0 I)^n \right) U^{-1},$$

*als* $A$ *in het domein van de machtreeks ligt.*

Dit betekent dat basistransformaties commuteren met het nemen van machtreeksen.

*Bewijs.* Allereerst geldt dat $UAU^{-1}$ en $A$ dezelfde operator zijn, uitgedrukt in verschillende bases. Om deze reden geldt dat $\left\|UAU^{-1} - x_0 I\right\| = \|A - x_0 I\|$, aangezien de operatornorm niet van de gekozen basis afhangt, en de identiteit in elke basis hetzelfde is. Om deze reden zijn bovenstaande machtreeksen convergent als $A$ tot het domein behoort.

Merk nu op dat $(UAU^{-1} - x_0I)^n = U(A - x_0I)^nU^{-1}$, aangezien in de vermenigvuldiging steeds $U$ weg valt tegen $U^{-1}$ behalve links en recht. Nu volgt gemakkelijk dat we uit de machtreeks een $U$ en een $U^{-1}$ kunnen trekken, aangezien elke term hiermee geconjugeerd wordt. □

We hebben nu genoeg voorkennis om de exponent en het logaritme van een operator definiëren.

**Definitie 1.8.** Zij $A$ een begrensde operator over een Banachruimte $V$. We definiëren de exponent van $A$ door:

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Deze is voor alle begrensde $A$ gedefiniëerd, aangezien de exponent oneindige convergentie straal heeft.

We definiëren het logaritme van $A$ door:

$$\log(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(A - I)^n}{n},$$

wat met bovenstaand Lemma convergeert als $\|A - I\| < 1$.

Merk op dat we gewoon de machtreeks voor het logaritme rond het getal 1 hebben gebruikt voor onze definitie. Deze reeks heeft convergentiestraal 1. Voor later gebruik is het handig om op te merken dat $\exp \circ \log$ gedefiniëerd is op $B_I(1)$, en $\log \circ \exp$ op $(-\infty, \log(2))$.

## 1.3 Eigenschappen van de exponent

Vanaf dit punt is het niet meer handig om het oneindig dimensionale geval mee te nemen in onze analyse. In deze sectie zijn alle operatoren om die reden gedefiniëerd over eindig dimensionale ruimtes. De volgende propositie geeft een aantal van de meest belangrijke eigenschappen van de exponent en het logaritme.

**Propositie 1.9** (Eigenschappen van de exponent)**.** *Laat $A, B \colon V \to V$. De exponent en het logaritme voldoen aan de volgende eigenschappen:*

1. $\log(\exp(A)) = \exp(\log(A)) = A$, *zolang dit gedefiniëerd is.*
2. *Als A en B commuteren, dan* $\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A) = \exp(A + B)$.
3. $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

*4.* $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$

*5.* $\exp(A)^* = \exp(A^*)$

*6. Lie product formule:* $\exp(A+B) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp(\frac{A}{n})\exp(\frac{B}{n})\right)^n$.

*Bewijs.*
1.) We zullen dit eerst bewijzen voor diagonaliseerbare matrices. Zij $D = U\Lambda U^{-1}$, waarbij $\Lambda$ diagonaal is. Uit Lemma 1.7 volgt dat $\log(\exp(D)) = U\log(\exp(\Lambda))U^{-1}$.

Nu is het uitrekenen van machtreeksen van diagonale matrices erg gemakkelijk, aangezien bij vermenigvuldiging alleen de diagonaalelementen worden vermenigvuldigd. We krijgen dus een diagonaalmatrix met op de diagonaal de exponent van de eigenwaarden (dus als functie van een complex getal):

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \dots \\ 0 & \exp(\lambda_2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dit werkt voor ieder machtreeks net als voor de exponent, en in het bijzonder dus ook voor het logaritme. Dus $\log(\exp(\Lambda))$ is een diagonaalmatrix met op de diagonaal $\log(\exp(\lambda_i))$. Omdat we voor de definitie van het logaritme en de exponent machtreeksen hebben gebruikt die elkaar inverteren op de complexe getallen, krijgen we dus precies de matrix $\Lambda$ terug. We hebben dus

$$\log(\exp(D)) = U\log(\exp(\Lambda))U^{-1} = U\Lambda U^{-1} = D.$$

Op exact dezelfde wijze kunnen we ook berekenen dat $\exp(\log(D)) = D$. Voor willekeurige matrices gebruiken we nu Propositie 1.4 en Lemma 1.6. We kunnen met de eerste een reeks $D_i$ vinden van diagonaliseerbare matrices die convergeert naar $A$, en met het Lemma volgt dan:

$$\log(\exp(A)) = \lim_{i\to\infty} \log(\exp(D_i)) = \lim_{i\to\infty} \log(D_i) = A.$$

Hier gebruiken we dat samenstelling van continue functies wederom continu zijn. Het omgekeerde geval werkt net zo.
2.) Als $A$ en $B$ commuteren, dan hebben we

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Dit is het binomium van Newton, dat we mogen gebruiken omdat $A$ en $B$ commuteren.

Nu kunnen we $\exp(A+B)$ uitrekenen:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \frac{B^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} = \exp(A)\exp(B).
\end{aligned}$$

3.) Dit volgt makkelijk uit het vorige punt. $A$ en $-A$ commuteren, dus we hebben dat

$$\exp(A)\exp(-A) = exp(0) = I.$$

4.) We vereenvoudigen weer eerst tot het diagonaliseerbare geval. Laat $D = U\Lambda U^{-1}$ met $\Lambda$ diagonaal. In dit geval is het makkelijk de determinant te bepalen.

$$\begin{aligned}
\det(\exp(U\Lambda U^{-1})) &= \det(U\exp(\Lambda)U{-}1) = \det(\exp(\Lambda)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i) = \exp(\operatorname{Tr}\Lambda) = \exp(\operatorname{Tr} D).
\end{aligned}$$

Nu volgt het algemene resultaat weer uit dichtheid van diagonaliseerbare matrices in $M_n(\mathbb{C})$, en continuïteit van machtreeksen. We gebruiken hier ook continuïteit van de determinant, wat duidelijk is uit het feit dat de determinant is opgebouwd uit vermenigvuldiging en optelling van matrix elementen.

5.) We gebruiken hier het feit dat conjugatie een continue operatie is, die distribueert over zowel sommen als vermenigvuldigingen. Dan krijgen we:

$$\exp(A)^* = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n)^*}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^*)^n}{n!} = \exp(A^*).$$

6.) Dit deel van het bewijs is in vergelijking met de andere delen een stuk bewerkelijker. We beginnen met een afschatting voor het logaritme. Zij $X$ een willekeurige matrix met $\|X - I\| < 1/2$ en schrijf, dan kunnen we afschatten:

$$
\begin{aligned}
\|\log(X)-(X-I)\| &= \left\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(X-I)^n}{n}\right\| \\
&\leq \|(X-I)^2\|\cdot\left\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(X-I)^{n-2}}{n}\right\| \\
&\leq \|X-I\|^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left\|\frac{(-1)^{n-1}(X-I)^{n-2}}{n}\right\| \\
&\leq \|X-I\|^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)^n}{n+2} \\
&\leq 2\|X-I\|^2
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Nu convergeert $\|\exp(\frac{A}{m})\exp(\frac{B}{m})\|$ naar $I$ als $m\to\infty$. Er is dus een $M\in\mathbb{N}$ zodat voor alle $m\geq M$ geldt dat

$$\left\|\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)-I\right\|<1/2$$

Ook kunnen we bovenstaand verschil met de machtreeks voor de exponent uitschrijven:

$$\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)-I=\frac{A}{m}+\frac{B}{m}+\frac{C}{m^2},$$

waarbij $C$ de restterm is, waar we een factor $m^2$ uit hebben getrokken. Als we dit alles samen voegen, krijgen we de volgende afschatting:

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C_m}\| &\equiv \left\|\log\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)\right)-\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)-I\right)\right\| \\
&\leq 2\left\|\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)-I\right)\right\|^2 \\
&= 2\left\|\frac{A}{m}+\frac{B}{m}+\frac{C}{m^2}\right\|^2 \\
&\leq \frac{\tilde{C}}{m^2},
\end{aligned}
$$

voor een contstante $\tilde{C}$. We noemen het hierboven afgeschatte verschil $\tilde{C}_m$.We schrijven dit nu om tot

$$\log\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)\right)=\frac{A}{m}+\frac{B}{m}+\frac{C}{m^2}+\tilde{C_m}$$

Als we ten slotte aan beide kanten het exponent nemen en tot de macht $m$ doen krijgen we:

$$\left(\exp\left(\frac{A}{m}\right)\exp\left(\frac{B}{m}\right)\right)^m = \exp(A + B + C/m + m\tilde{C}_m).$$

Als we nu aan beide kanten het limiet nemen, vervalt $C/m$ en $\tilde{C}_m$, aangezien $\|m\tilde{C}_m\| < \frac{\tilde{C}}{m}$. Hierbij gebruiken we dat we het limiet met een exponent mogen verwisselen. Dit is precies het gewenst resultaat. □

Exponenten zijn van belang voor het begrip van een een-parameter ondergroep in $GL_n(\mathbb{R})$ of $GL_n(\mathbb{C})$, de groep van inverteerbare $n \times n$ matrices over respectievelijk $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. In het vervolg zal ik $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ schrijven als $\mathbb{F}$, als ik een van de twee bedoel.

**Definitie 1.10.** Een een-parameter ondergroep van $GL_n(\mathbb{F})$ is een continue afbeelding $A\colon \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{F})$, die voldoet aan:

- $A(0) = I$
- $A(t + s) = A(t)A(s)$

Merk op dat dit niet echt een ondergroep is, maar een afbeelding. De verzameling

$$H = \{A(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$$

is echter wel een ondergroep. Ik zal deze terminologie in het vervolg aanhouden, en de afbeelding aanduiden als een-parameter ondergroep.

Met bovenstaande eigenschappen is makkelijk in te zien dat $A(t) = \exp(tX)$ een een-parameter ondergroep is voor een willekeurige matrix $X$. Het blijkt zelfs dat elke een-parameter ondergroep van deze vorm is.

**Propositie 1.11.** *Zij $A$ een een-parameter ondergroep van $GL_n(\mathbb{F})$ dan is er een unieke matrix $X \in M_n(\mathbb{F})$ zodat*

$$A(t) = \exp(tX)$$

Voordat we dit bewijs kunnen geven is eerst een Lemma nodig

**Lemma 1.12.** *Elke een-parameter $A(t)$ ondergroep is glad, in de zin dat we willekeurig vaak naar $t$ kunnen afleiden.*

*Bewijs.* Voor dit bewijs hebben we een familie $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ van gladde, compact gedragen delta-distributies nodig. Existentie van een dergelijke familie veronderstel ik als bekend uit de topologie of de analyse. We definiëren nieuwe matrices $B_n$ door middel van:

$$B_n(t) = \int f_n(s - t)A(s)ds.$$

Hier definiëren we de integraal per coëfficiënt, wat kan omdat $A(s)$ continu is. Omdat alle $t$-afhankelijkeid van $B_n$ in $f_n$ is bevat, is $B_n$ glad. Als we in de integraal overgaan op de nieuwe variabele $v = s - t$ hebben we

$$B_n(t) = \int f_n(v)A(v+t)dv = \int f_n(v)A(v)A(t)dv = A(t)\int f_n(v)A(v).$$

Omdat de determinant een continue functie is, zal er een open omgeving $V$ van $I$ zijn waarin alle matrices inverteerbaar zijn. Door de keuze van $f_n$ zal $\int f_n(v)A(v)$ voor $n$ groot genoeg in deze verzameling $V$, en dus inverteerbaar zijn. We hebben dus:

$$A(t) = B_n(t)\left(\int f_n(v)A(v)\right)^{-1},$$

waaruit we zien dat $A(t)$ glad is. $\square$

Nu kunnen we het bewijs voor Propositie 1.11 leveren.

*Bewijs van Propositie 1.11.* Zij $A$ een een-parameter ondergroep. Kies $X = \frac{dA}{dt}|_{t=0}$. We zullen bewijzen dat $A(t) = \exp(tX)$. Voor gladde reëele functies is het verschil tussen de functie en zijn lineaire benadering, kwadratisch in $t$. Dit is uit te breidden naar matrices door naar elke coëfficiënt van $A$ apart te kijken, en het verschil te sommeren over alle indices. We hebben dus

$$\|A(t) - (I + tX)\| \leq Ct^2,$$

voor een constante $C$. Noem dit verschil $D(t) = A(t) - (I + tX)$. We schrijven nu $A(t)$ om als:

$$A(t) = \left(A\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m = \left(I + \frac{t}{m}X + D\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m. \tag{1.2}$$

Als $m$ groot genoeg wordt, kunnen we de afschatting 1.1 gaan gebruiken. We vinden dus dat

$$\left\|\log\left(I + \frac{t}{m}X + D\left(\frac{t}{m}\right)\right) - \left(\frac{t}{m}X + D\left(\frac{t}{m}\right)\right)\right\| \leq 2\left\|\frac{t}{m}X + D\left(\frac{t}{m}\right)\right\|^2.$$

Dit verschil noemen we $E$, waarbij dus $\|E\| \leq \frac{\tilde{C}}{m^2}$ voor vaste $t$. Als we de exponent nemen en dit tot de $m$'de macht verheffen vinden we dus

$$\left(I + \frac{t}{m}X + \frac{D}{m^2}\right)^m = \exp\left(\frac{t}{m}X + \frac{D}{m^2} + E\right)^m = \exp\left(tX + \frac{D}{m} + mE\right),$$

en dit convergeert naar $\exp(tX)$ als $m \to \infty$, aangezien de termen $D/m$ en $mE$ in norm naar 0 convergeren, en de exponent continu is. Als we dus in 1.2 de limiet $m \to \infty$ nemen, vinden we dat

$$A(t) = \lim_{m\to\infty}\left(I + \frac{t}{m}X + \frac{D}{m^2}\right)^m = \exp(tX)$$

$\square$

In het volgende hoofdstuk zullen we op dit resultaat terugkomen, als we isomorfismen van Lie groepen bespreken.

## 1.4 Lie groepen en Lie algebra's

De vorige sectie was erg technisch, maar in deze sectie zullen we de resultaten gebruiken om een aantal belangrijke feiten te bewijzen die wat meer tot de verbeelding spreken. Hier wordt ook duidelijk wat het nut is van het bestuderen van exponenten en logaritmes van matrices. Allereerst de definitie van een matrix-Lie groep, een van de onderwerpen die ik in deze scriptie zal bestuderen.

**Definitie 1.13.** Een matrix-Lie groep $G$ is een ondergroep van $GL_n(\mathbb{C})$ of $GL_n(\mathbb{R})$, die gesloten is als deelverzameling.

Herinner je dat $GL_n(\mathbb{C})$ en $GL_n(\mathbb{R})$ de groepen van inverteerbare $n \times n$ matrices over $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. Merk op dat $GL_n(\mathbb{F})$ zelf niet gesloten is als deelverzameling van $M_n(\mathbb{F})$, aangezien bijvoorbeeld de rij $\frac{I}{m}$ voor willekeurige $m$ inverteerbaar is, maar duidelijk de 0-matrix als limiet heeft.

We kunnen de eis dat $G$ gesloten moet zijn dus als volgt samenvatten: Als $A_m$ rij van matrices in $G$ is die convergeert naar een matrix $X$, dan ligt $X$ ofwel in $G$ ofwel $X$ is niet inverteerbaar.

**Voorbeeld 1.14.** Een aantal voorbeelden van Lie groepen die we vaker zullen tegen komen:

- $O(n) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\right\}$
- $SO(n) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}, \det(A) = 1\right\}$
- $U(n) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}\right\}$
- $SU(n) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1}, \det(A) = 1\right\}$

Het feit dat dit groepen zijn acht ik als bekend. Ze zijn gesloten omdat de eisen die worden gelegd gesloten eisen zijn op continue functies, zoals bijvoorbeeld $\det(A) = 1$.

Het handigste hulpmiddel in de analyse van matrix-Lie groepen is de zogenaamde Lie algebra die met een Lie groep wordt geassocieerd. In tegenstelling tot de groep is een Lie algebra een lineaire vector-ruimte, en daarom makkelijker in het gebruik dan de groep zelf. De definitie is als volgt.

**Definitie 1.15.** Zij $G$ een matrix-Lie groep over $\mathbb{F}$. We definiëeren de bijbehorende Lie algebra $\mathfrak{g}$ door

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid \exp(tX) \in G \,\forall t \in \mathbb{R}\} \tag{1.3}$$

De belangrijkste eigenschappen van de Lie algebra zijn in de volgende propositie gegeven.

**Propositie 1.16.** *Zij $\mathfrak{g}$ de Lie algebra behorende bij $G$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ en $s \in \mathbb{R}$. $\mathfrak{g}$ voldoet aan de volgende eigenschappen:*

1. $sX \in \mathfrak{g}$

2. *$X + Y \in \mathfrak{g}$*

3. *Voor $A \in G$, $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$*

4. *De **commutator** $[X, Y] = XY - YX$ is bevat in $\mathfrak{g}$*

De eerste twee eigenschappen maken $\mathfrak{g}$ een reële vectorruimte, en de laatste maakt het een Lie algebra (punten 1,2 en 4 zijn precies de eisen die een verzameling moet hebben om een algemene Lie algebra te zijn).

*Bewijs.* 1.) Dit is direct duidelijk uit de definitie van $\mathfrak{g}$.

2.) Hier gebruiken we de Lie-product formule:

$$\exp(X + Y) = \lim_{m\to\infty} \left(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right)^m. \tag{1.4}$$

Omdat $\exp\left(\frac{X}{m}\right)$ en $\exp\left(\frac{Y}{m}\right)$ beide in G zijn bevat, is ook $\left(\exp\left(\frac{X}{m}\right)\exp\left(\frac{Y}{m}\right)\right)^m$ in G bevat. Omdat G gesloten is onder limieten, ligt dus ook $\exp(X + Y)$ in G.

3.)Dit volgt gemakkelijk uit Lemma 1.7

4.)Merk op dat uit het vorige punt volgt dat $\exp(tX)Y\exp(-tX) \in \mathfrak{g}$ voor alle t. Als we de afgeleide nemen van deze functie naar de tijd en $t = 0$ stellen, vinden we met de productregel:

$$\frac{d}{dt}\exp(tX)Y\exp(-tX)|_{t=0} = XY - YX = [X, Y].$$

Het gebruik van de productregel is hier legitiem omdat hij geldt voor alle coëfficienten. Als we het product van twee matrices afleiden, kunnen we in elke coëfficient de productregel toepassen, en vervolgens dit weer uitschrijven als product van matrices.

Aan de andere kant hebben we in punt 1 en 2 al bewezen dat $\mathfrak{g}$ een reëele vectorruimte is, en om deze reden is hij gesloten onder het nemen van limieten. Om deze reden hebben we dat

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\exp(tX)Y\exp(-tX)|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\exp(tX)Y\exp(-tX) - Y}{t},$$

waaruit volgt dat $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ □

**Voorbeeld 1.17.** We kunnen met behulp van Propositie 1.3 van bovenstaande groepen makkelijk de Lie algebra bepalen. We geven hier als conventie een groep altijd hoofdletters, en de bijbehorende algebra kleine letters.

- $o(n) = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\right\}$, Dit volgt uit punt 3 en 5 van Propositie 1.3.

- $so(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A \text{ , } \mathrm{Tr}(X) = 0\}$, waarbij we punt 4 extra gebruiken.
- $u(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* = -A\}$
- $su(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* = -A \text{ , } \mathrm{Tr}(X) = 0\}$

Merk op dat voor $so(n)$ uit de eerste eigenschap volgt dat de diagonaal al leeg is, de eis $\mathrm{Tr}(X) = 0$ voegt niets toe. We zien dus dat $o(n) = so(n)$.

We zagen in bovenstaand voorbeeld dat de Lie algebra niet sterk genoeg is om de hele Lie groep te definiëeren, aangezien twee echt verschillende groepen($-I \in O(n), -I \notin SO(n)$) dezelfde Lie algebra hebben. De correspondentie is dus niet globaal. Het blijkt echter dat de Lie groep en de Lie algebra wel **lokaal** in correspondentie staan.

**Stelling 1.18.** *Zij $G$ een matrix-Lie groep, en $\mathfrak{g}$ de bijbehorende Lie algebra. Dan is er een open omgeving $U$ van $0 \in \mathfrak{g}$ die door de matrix-exponent bijectief wordt afgebeeld op een omgeving $V$ van $I \in G$.*

Deze stelling lijkt triviaal doordat we de exponent kunnen inverteren met het logaritme. Helaas is er geen garantie dat het logaritme een matrix $A$ uit $G$ ook daadwerkelijk afbeeld in $\mathfrak{g}$. We weten alleen dat er een matrix in $M_n(\mathbb{F})$ is, die als exponent weer $A$ geeft, maar deze hoeft niet in $\mathfrak{g}$ te liggen.

Bovenstaande stelling is in 1929 al door John Von Neumann gesteld en bewezen, zie hiervoor zijn artikel [13]. Ik volg hier in grote lijnen zijn bewijs-methode.

*Bewijs.* Merk op dat $\mathfrak{g}$ als lineaire deelruimte van $M_n(\mathbb{F})$ een orthogonaal complement $\mathfrak{g}^\perp$ moet hebben ten opzichte van het standaard inproduct op $\mathbb{F}^{n^2}$. We kunnen $\mathbb{F}^{n^2}$ dus ontbinden als $\mathfrak{g} \bigoplus \mathfrak{g}^\perp$. We kijken nu naar de volgende functie:

$$\begin{aligned} &\phi\colon \mathbb{F}^{n^2} \to \mathbb{F}^{n^2} \\ &\phi(X, Y) = \exp(X)\exp(Y). \end{aligned}$$

Waar $X \in \mathfrak{g}$ en $Y \in \mathfrak{g}^\perp$. We berekenen de afgeleide van deze functie rond het punt nul.

$$\begin{aligned} &\phi(tX, tY) = I + tX + tY + O(t^2) \\ \Rightarrow &\frac{d}{dt}\phi(tX, tY)|_{t=0} = X + Y \\ \Rightarrow &d\phi_0 = I. \end{aligned}$$

We kunnen nu de inverse-functie stelling gebruiken, aangezien de afgeleide van $\phi$ niet-singulier is. We vinden dus open omgevingen $\tilde{V}$ van $I$ en $\tilde{U}$ van 0 zodat voor elke $A \in G$ er unieke $X \in \mathfrak{g}$ en $Y \in \mathfrak{g}^\perp$ zijn zodat

$$A = \exp(X)\exp(Y).$$

Zij nu $A_m$ een rij in $G$ naar de identiteit. We bewijzen dat voor $m$ groot genoeg

$$A_m = \exp(X_m). \tag{1.5}$$

Omdat $A_m$ naar $I$ convergeert, ligt de rij in $\tilde{V}$ voor grote $m$. We nemen voor het gemak aan dat dit geldt vanaf $m = 0$. We hebben dus unieke rijen $X_m$ en $Y_m$ in $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{g}^{\perp}$ zodat $A_m = \exp(X_m)\exp(Y_m)$. Wegens continuïteit van de exponent moeten deze beide rijen naar nul convergeren.

Stel nu dat $Y_m$ niet constant nul wordt voor grote m, we kunnen dan overgaan op een deelrij $\overline{Y_m}$, zodat $\overline{Y_m} \neq 0\ \forall m$. We kunnen nu kijken naar de rij $\overline{Y_m}/\|\overline{Y_m}\|$. Omdat de eenheidsbol in $\mathfrak{g}$ compact is, kunnen we (voor de laatste keer) overgaan op een deelrij $\tilde{Y}_m$ zodat bovenstaand quotiënt convergeert naar een $Y \in \mathfrak{g}^{\perp}$.

Nu komen we echter op een tegenspraak aan, omdat we kunnen bewijzen dat deze $Y$ ook in $\mathfrak{g}$ moet liggen. Zij $t \in \mathbb{R}$, omdat $\|\tilde{Y}_m\|$ naar 0 convergeert, kunnen we gehele getallen $k_m$ vinden zodat $k_m\|\tilde{Y}_m\|$ naar $t$ convergeert. Dan kunnen we berekenen:

$$\exp(\tilde{Y}_m))^k{}_m = \exp\left(\frac{\tilde{Y}_m}{\|\tilde{Y}_m\|}\right)\exp(k_m\|\tilde{Y}_m\| \to \exp(tY).$$

Maar aan de andere kant hebben we dat $\exp(\tilde{Y}_m)^k{}_m$ in $G$ ligt voor alle $m$, aangezien

$$\exp(\tilde{Y}_m) = A_m exp(-\tilde{X}_m).$$

Omdat $G$ gesloten is, volgt hieruit dat $Y \in \mathfrak{g}$, wat een tegenspraak is.

Voor grote $m$ geldt dus dat aan vergelijking 1.5 is voldaan. Er is dus een omgeving $V$ van $I$ die voldoet. Neem $U = \log(V)$ om het bewijs af te maken. $\square$

Een belangrijke consequentie van deze stelling is dat elke matrix-Lie groep een gladde variëteit is. Om een operator $A \in G$ hebben we als parametrisatie namelijk $X \to A\exp(X)$. Dit is een vrij wonderlijk resultaat: alleen uit het feit dat $G$ een groep is en dat hij gesloten is, volgt onmiddellijk dat de structuur van $G$ ook glad is. Een uitgebreid bewijs van deze stelling zal ik niet geven, maar in feite hoeven alleen de eisen van gladheid na te worden gegaan.

Een ander belangrijk gevolg, dat voor ons van groter belang zal zijn, is dat elk element in een samenhangende Lie groep te schrijven is als product van exponenten uit de algebra. De exponent is dus niet helemaal surjectief, maar als we producten beschouwen kunnen we wel de hele groep opbouwen uit de algebra.

Herinner je dat een topologische ruimte samenhangend is als de enige open en gesloten verzamelingen de lege verzameling en de hele ruimte zijn. Omdat een matrix-Lie groep een variëteit is, valt dit begrip samen met dat van padsamenhangendheid. Dit houdt in dat elke twee punten uit de verzameling door een continu pad zijn te verbinden.

**Propositie 1.19.** *Zij $G$ een samenhangende matrix-Lie groep, en $A \in G$. Dan zijn er matrices $\{X_i\}_{i=1}^n$ in $\mathfrak{g}$ zodat $A$ te schrijven is als:*

$$A = \prod_{i=1}^{n} \exp(X_i). \tag{1.6}$$

*Bewijs.* Zij $C \in G$ de verzameling van alle elementen uit $G$ die te schrijven zijn als in vergelijking 1.6. We gaan bewijzen dat deze verzameling zowel open als gesloten is. Merk bovendien op dat $C$ niet leeg is, aangezien het de eenheid bevat.

Eerst bewijzen we dat $C$ open is. Uit Stelling 1.18 volgt dat we een open omgeving $V$ van de eenheid hebben waarin elke matrix te schrijven is als exponent uit de algebra. Dan is de verzameling $AV = \{AB \mid B \in V\}$ een open omgeving van $A$, aangezien vermenigvuldiging een continue, inverteerbare operatie is. Ook heeft $A$ per aanname een schrijfwijze als in 1.6, en is $B$ ook een exponent. Dus bij elkaar:

$$AB = \left(\prod_{i=1}^{n} \exp(X_i)\right) \exp(X),$$

waaruit we zien dat $AV \subset C$.

Nu rest nog te bewijzen dat $C$ gesloten is. Stel dat $(A_n)$ een rij is in $C$ die convergeert naar een matrix $A$. Dit is equivalent met de bewering dat $A_n A^{-1}$ convergeert naar $I$, aangezien wederom vermenigvuldiging continu is. Als $n$ dus groot genoeg wordt, zal $A_n A^{-1}$ in het gebied $V$ liggen, dus we hebben:

$$A_n A^{-1} = \exp(X)$$
$$A = A_n \exp(-X).$$

En aangezien $A_n$ al de gewenste vorm had, heeft $A$ die ook. Uit het bovenstaande volgt met samenhangendheid van $G$ dat $C$ de hele ruimte beslaat. Dit bewijst de propositie.

□

# Hoofdstuk 2

# Afbeeldingen en representaties

## 2.1 Homomorfismen van Lie groepen en Lie algebra's

Tot nu toe heb ik nog niets gezegd over afbeeldingen tussen verschillende groepen en algebra's. Net als in andere takken van de wiskunde willen we hier kijken naar afbeeldingen die de structuur die we beschouwen behouden. Het is om deze reden wenselijk om naar continue afbeeldingen te kijken, omdat de groepen die we beschouwen een topologie hebben. Ook willen we natuurlijk de vermenigvuldiging bewaren voor groepen, en de commutator voor algebra's.

**Definitie 2.1.** Laat $G_1$ en $G_2$ twee matrix-Lie groepen zijn. We noemen een afbeelding $\Phi\colon G_1 \to G_2$ een Lie groepen homomorfisme als $\Phi$ voldoet aan:

- $\Phi$ is continu
- $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$.

Als $\Phi$ daarnaast inverteerbaar is en $\Phi^{-1}$ ook een Lie groepen homomorfisme is, dan noemen we $\Phi$ een Lie groepen isomorfisme.

**Definitie 2.2.** Laat $\mathfrak{g}_1$ en $\mathfrak{g}_2$ twee Lie algebra's zijn. Een afbeelding $\phi\colon \mathfrak{g}_1 \in \mathfrak{g}_2$ noemen we een Lie algebra homomorfisme als hij voldoet aan:

- $\phi$ is lineair
- $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$.

Als $\phi$ inverteerbaar is, dan noemen we $\phi$ een Lie algebra isomorfisme.

Merk op dat continuïteit voor $\phi$ automatisch volgt uit lineariteit, aangezien we in eindige dimensie werken. Een belangrijke vraag is in hoeverre we het volgende plaatje kunnen laten commuteren:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\Phi} & G_2 \\ {\scriptstyle\exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\exp} \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{g}_2 \end{array} \tag{2.1}$$

Hiermee bedoel ik de vraag of er voor gegeven $\Phi$ een $\phi$ bestaat zodat $\Phi \circ \exp = \exp \circ\, \phi$, en natuurlijk andersom net zo. Deze vraag is van belang omdat het vinden van afbeeldingen voor de algebra vaak makkelijk is, maar voor de groep een stuk moeilijker.

Het blijkt dat een richting makkelijk te bewijzen is zonder verdere aannamen: Lie groep-afbeeldingen induceren altijd Lie algebra-afbeeldingen. Andersom is het helaas iets minder gemakkelijk. Hierover later meer.

**Stelling 2.3.** *Laat $G_1$ en $G_2$ twee matrix-Lie groepen zijn, en $\mathfrak{g}_1$ en $\mathfrak{g}_2$ de twee bijbehorende Lie algebra's. Stel dat we een Lie groepen homomorfisme $\Phi$ hebben, dan is er een uniek Lie algebra homomorfisme zodat 2.1 sluitend is.*

*Bewijs.* Voor de constructie van $\phi$ merken we op dat voor een $X \in \mathfrak{g}_1$ de afbeelding $\Phi(\exp(tX))$ een een-parameter ondergroep is, aangezien samenstelling van continue afbeeldingen ook continu zijn. Met Propositie 1.11 is er dus *unieke* $\tilde{X} \in \mathfrak{g}_2$ zodat

$$\Phi(\exp(tX)) = \exp(t\tilde{X}).$$

We definiëren nu $\phi$ door $\phi(X) = \tilde{X}$. Merk op dat we $\phi$ kunnen berekenen door:

$$\phi(X) = \tilde{X} = \frac{d}{dt}\exp(t\tilde{X}))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi(\exp(tX))|_{t=0}. \tag{2.2}$$

In feite is dit al genoeg om het diagram 2.1 te sluiten, want

$$\exp(\phi(X)) = \exp(\tilde{X}) = \Phi(\exp(x)).$$

We weten echter nog niet of $\phi$ daadwerkelijk een Lie algebra homomorfisme is. We bewijzen eerst lineariteit.

Zij $X, Y \in \mathfrak{g}_1$, we berekenen nu met de Lie productformule dat

$$\begin{aligned} \exp(t\phi(X+Y)) &= \Phi(\exp(X+Y)) \\ &= \Phi\left(\lim_{m\to\infty}\left(\exp\left(\frac{tX}{m}\right)\exp\left(\frac{tY}{m}\right)\right)^m\right) \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\Phi\left(\exp\left(\frac{tX}{M}\right)\right)\Phi\left(\exp\left(\frac{tY}{M}\right)\right)\right)^m \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\exp\left(\frac{t\phi(X)}{m}\right)\exp\left(\frac{t\phi(Y)}{m}\right)\right)^m \\ &= \exp(t(\phi(X)+\phi(Y))). \end{aligned}$$

Afgeleide bij $t = 0$ nemen geeft dus dat

$$\phi(X + Y) = \phi(X) + \phi(Y). \tag{2.3}$$

Zij nu $s \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan

$$\exp(t\phi(sX)) = \Phi(\exp(t(sx))) = \exp(ts\phi(x)).$$

Afgeleide nemen bij $t = 0$ geeft dus weer dat

$$\phi(sX) = s\phi(X). \tag{2.4}$$

Nu zijn vergelijkingen 2.3 en 2.4 precies de eisen die aan $\phi$ worden gesteld om lineair te zijn. Voor het behouden van de commutator hebben we eerst een klein resultaat nodig. Zij $A \in G$, we vinden dan

$$\begin{aligned}
\exp(t\phi(AXA^{-1})) &= \Phi(\exp(tAXA^{-1})) \\
&= \Phi(A\exp(tX)A^{-1}) \\
&= \Phi(A)\exp(t\phi(X))\Phi(A)^{-1}.
\end{aligned}$$

Als we afleiden bij $t = 0$ vinden we dat

$$\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}. \tag{2.5}$$

Herinner je dat we de commutator konden berekenen als

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\exp(tX)Y\exp(-tX)|_{t=0}.$$

Als we dit in $\phi$ invullen krijgen we:

$$\begin{aligned}
\phi([X, Y]) &= \phi\left(\frac{d}{dt}\exp(tX)Y\exp(-tX)|_{t=0}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\phi(\exp(tX)Y\exp(-tX))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\Phi(\exp(tX))\phi(Y)\Phi(\exp(-tX))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\exp(t\phi(X))\phi(Y)\exp(-t\phi(X)|_{t=0} \\
&= [\phi(X), \phi(Y)].
\end{aligned}$$

Hier gebruiken we in regel twee dat afgeleides en lineaire transformaties commuteren, en in regel drie vergelijking 2.5.

Dit bewijst dat $\phi$ inderdaad een Lie algebra homomorfisme is. Als ten slotte $\psi$ ook een Lie algebra homomorfisme is met $\Phi \circ \exp = \exp \circ \psi$, dan zien we dat:

$$\psi(X) = \frac{d}{dt}\exp(t\psi(X))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi(\exp(tX))|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(t\phi(X))|_{t=0} = \phi(X),$$

wat uniciteit inhoudt. $\square$

Merk op dat als $\Phi$ bovendien een Lie groepen isomorfisme is, dat er dan een Lie groepen homomorfisme $\sigma$ is dat correspondeert met $\Phi^{-1}$. We kunnen dan makkelijk berekenen:

$$\exp = \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \exp = \Phi^{-1} \circ \exp \circ \phi = \exp \circ \sigma \circ \phi.$$

Omdat het boven gevonden Lie algebra homomorfisme uniek is, moet dus gelden dat:

$$I = \sigma \circ \phi.$$

Oftewel: $\phi$ is inverteerbaar, en $\phi^{-1} = \sigma$.

De omgekeerde richting betreft een veel diepere stelling, die ook niet zonder aannamen waar is. Het volledige bewijs is helaas te uitgebreid om te behandelen, hiervoor verwijs ik naar hoofdstuk 4 en 5 van [5]. Ik zal echter wel een korte schets geven van het bewijs.

Herinner je dat een topologische ruimte $X$ enkelvoudig samenhangend is als elke gesloten kromme continu te krimpen is tot een punt. Dit is equivalent met het feit dat elk twee krommen in $X$ homotoop zijn.

**Stelling 2.4.** *Laat $G_1$ en $G_2$ twee matrix-Lie groepen zijn, waarbij $G_1$ samenhangend en enkelvoudig samenhangend is. Laat $\mathfrak{g}_1$ en $\mathfrak{g}_2$ de twee bijbehorende Lie algebra's zijn. Stel dat we een Lie algebra homomorfisme $\phi$ hebben, dan is er een uniek Lie groepen homomorfisme $\Phi$ zodat 2.1 sluitend is.*

Merk op dat we in Stelling 2.3 geen eisen hadden aan onze groepen, maar dat is hier dus niet zo. In zekere zin zijn deze eisen het gevolg van het feit dat het logaritme niet globaal is gedefiniëerd, en de exponent wel. Om deze reden is het nodig steeds terug te 'springen' naar het gebied waar het logaritme is gedefiniëerd, om daar $\Phi$ te definiëren.

*Bewijsschets.* Uit Stelling 1.18 hebben we een omgeving $V$ van de eenheid diffeomorf met $U \in \mathfrak{g}_1$. Op deze omgeving definiëren we

$$\Phi(A) = (\exp \circ \phi \circ \log)(A)$$

Deze $\Phi$ is duidelijk continu, maar het is niet triviaal dat deze afbeelding ook een groepshomomorfisme is. Dit resultaat is ook vrij diepgaand, en is het onderwerp van hoofdstuk 4 in [5]. Ik zal er hier niet verder op ingaan, en aannemen dat $\Phi$ vermenigvuldiging bewaart.

Nu rest nog de taak om $\Phi$ op de rest van $G_1$ te definiëren. Zij dus $A \in G_1$. Omdat $G_1$ padsamenhangend is, is er een continu pad $A(t)$ tussen $I$ en $A$. Omdat het interval $[0, 1]$ compact is, kunnen we een eindig aantal $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$ kiezen zodat

$$A(t)A(t_n)^{-1} \in V \; \forall \; t_i < t < t_{i+1}$$

Dit argument vrij uitgebreid maar niet erg ingewikkeld. Belangrijke punt is dat $A(t)$ continu is, zodat voor elke t er een interval $(t, t + \delta)$ is zodat voor alle $s$ in dit interval

$$A(s)A(t)^{-1} \in V$$

Deze intervallen geven een overdekking van $[0,1]$, en wegens compactheid kunnen we dus een eindig aantal van deze intervallen kiezen zodat we nog steeds een overdekking hebben.

We kunnen dan $\Phi$ vastleggen op $A(t)$, met $t_i < t < t_{i+1}$ door

$$\Phi(A(t)) = \Phi\left(A(t)A(t_i)^{-1}\right)\Phi(A(t_i)),$$

waarbij we $\Phi(A(t_i))$ stapsgewijs vastleggen. Rest van het bewijs betreft de kwestie of deze definitie afhangt van de keuze van de curve $A(t)$.

Hiervoor bewijs je eerst onafhankelijkheid van partitionering, en daarna onafhankelijk van curve, door gebruik te maken van het feit dat $G_1$ enkelvoudig samenhangend is. Je kan dus twee definities van $\Phi$ langzaam in elkaar over voeren met een homotopie van de twee gebruikte paden. Hierbij blijft de gedefiniëerde $\Phi$ onveranderd, wat aantoont dat keuze van pad onbelangrijk is. $\square$

**Gevolg 2.5.** *Als $G_1$ en $G_2$ samenhangend en enkelvoudig samenhangend zijn en $\phi$ inverteerbaar is, dan is ook de gevonden $\Phi$ inverteerbaar.*

*Bewijs.* Uit de vorige stelling hebben we dat er een $\tilde{\Phi}$ is die correspondeert met $\phi^{-1}$, onze taak is te bewijzen dat $\tilde{\Phi} = \Phi^{-1}$. Zij dus $A \in G_1$. Omdat $G_1$ samenhangend is, volgt uit Stelling 1.19 dat $A = \prod_{i=1}^{n} \exp(X_i)$ voor $X_i \in \mathfrak{g}_1$. We vinden dan

$$\tilde{\Phi} \circ \Phi(A) = \tilde{\Phi} \circ \Phi\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\phi^{-1} \circ \phi(X_i)) = \prod_{i=1}^{n} \exp(X_i) = A.$$

Hieruit zie je dat $\tilde{\Phi} = \Phi^{-1}$. $\square$

We kunnen bovenstaande resultaten als volgt samenvatten: Als $G_1 \cong G_2$, dan ook $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$. Als $G_1$ en $G_2$ enkelvoudig samenhangend en samenhangend zijn, geldt dat als $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$, dan ook $G_1 \cong G_2$.

## 2.2 $SU(2)$ en $SO(3)$

Een belangrijk voorbeeld van de resultaten uit de vorige sectie wordt gegeven door de relatie tussen $SU(2)$ en $SO(3)$. $SO(3)$ is de groep van alle rotaties in drie dimensies, en is om deze reden belangrijk voor onze analyse van rotatiesymmetrie. Het blijkt echter dat $SO(3)$ niet samenhangend is, maar $SU(2)$ wel. Allereerst is het van belang in te zien wat de elementen van $SO(3)$ zijn. Zij $A \in SO(3)$, dan heeft $A$ een eigenwaarde 1:

$$\det(A-I) = \det(A^T-I) = \det(A^T-A^TA) = \det(A^T)\det(I-A) = -\det(A-I)$$

Hieruit zien we dat $\det(A-I) = 0$. Er is dus een vector $v$ die op zichzelf wordt afgebeeld. Ga met een matrix $U$ over op een nieuwe basis, met $v$ als eerste basisvector. Dan

$$A = U\begin{pmatrix} 1 & \\ & A' \end{pmatrix}U^{-1}.$$

Een korte berekening laat zien dat $A' \in SO(2)$, en dit zijn de twee-dimensionale rotaties. Er is dus $\theta$ zodat

$$A = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Dit laat zien dat $A$ een rotatie in drie dimensies is. Nu de elementen van $SU(2)$. Omdat een element $A \in SU(2)$ inproducten behoud, moeten de twee kolommen orthonormaal zijn. We schrijven voor de eerste $\binom{\alpha}{\beta}$. De vector $\binom{-\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ staat hier loodrecht op, en de tweede kolom moet hier dus een veelvoud van zijn. Uit de eis dat $\det(A) = 1$ volgt dat er gelijkheid moet gelden. We schrijven dus:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}: \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Je ziet hier dat $SU(2)$ topologisch equivalent is aan de 3-sfeer in $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, en in het bijzonder dus samenhangend en enkelvoudig-samenhangend is.

Op het eerste gezicht lijken deze groepen weinig op elkaar, maar het blijkt dat hun algebra's isomorf zijn. Herinner je dat:

- $so(3) = \left\{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\,,\ \mathrm{Tr}(X) = 0\right\}$
- $su(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^* = -A\,,\ \mathrm{Tr}(X) = 0\}$.

We maken dan een basis voor $so(3)$ door

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Direct uitrekenen van commutatoren geeft dat

$$[J_1, J_2] = J_3, \qquad [J_2, J_3] = J_1, \qquad [J_3, J_1] = J_2. \tag{2.7}$$

Voor $su(2)$ kiezen we een soortgelijke basis:

$$E_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

En hier zijn de commutatie-relaties:

$$[E_1, E_2] = E_3, \qquad [E_2, E_3] = E_1, \qquad [E_3, E_1] = E_2. \tag{2.9}$$

We zien dus dat de twee algebra's isomorf zijn, we kunnen $\phi\colon su(2) \to so(3)$ maken door $E_i$ op $J_i$ af te beelden. Omdat $SU(2)$ samenhangend en enkelvoudig samenhangend is hebben we met Stelling 2.4 ook een $\Phi\colon SU(2) \to SO(3)$ die correspondeert met deze $\phi$. Deze $\Phi$ noemen we de 'dubbele overdekking' van $SO(3)$ door $SU(2)$. Het blijkt namelijk dat de kern van deze afbeelding $\{I, -I\}$ is.

**Propositie 2.6.** *De hierboven gedefinieerde afbeelding $\Phi$ heeft $\{I, -I\}$ als kern.*

Voor het bewijs hiervan hebben we een klein algemeen lemma nodig.

**Lemma 2.7.** *Zij $G$ een samenhangende matrix-Lie groep, en $N$ een discrete normaaldeler van $G$. Dan $N \in Z(G)$, het centrum van $G$.*

*Bewijs.* Zij $A \in N$. We moeten bewijzen dat $A$ commuteert met alle elementen van $G$. Omdat $N$ discreet is, is er open omgeving $U$ van $A$ zodat $N \cap U = \{A\}$. Zij nu $X \in \mathfrak{g}$. Omdat $B(t) = \exp(tX)A\exp(-tX)$ naar $A$ convergeert voor $t \to 0$, ligt hij voor kleine $t$ in $U$. Omdat $N$ een normaaldeler is, moet $B(t) \in N$ voor alle $t$.

We kunnen concluderen dat voor kleine $t$ geldt dat $\exp(tX)A = A\exp(tX)$. Hieruit volgt gemakkelijk door herhaaldelijk vermenigvuldigen dat $\exp(X)A = A\exp(X)$ voor alle $X \in \mathfrak{g}$. Omdat $G$ samenhangend is, volgt met Stelling 1.19 dat $A$ commuteert met elk element uit $G$. $\square$

*Bewijs Propositie 2.6.* Merk op dat $\exp(2\pi E_3) = -I$, wat volgt met een directe berekening. Aan de andere kant hebben we dat $\exp(2\pi J_3) = I$, ook weer uit directe calculatie. We hebben dus

$$\Phi(-I) = \Phi(\exp(2\pi E_3)) = \exp(2\pi J_3) = I,$$

waaruit duidelijk is dat $\ker(\Phi)$ de verzameling $\{I, -I\}$ bevat. Nu is er omgeving $V$ van de identiteit zodat $\Phi$ injectief is op deze verzameling. Dit volgt uit Stelling 1.18, aangezien er een $V$ is waarop het logaritme bijectief is. Voor elke $A \in \ker(\Phi)$ is dus $AV$ een omgeving van $A$ waarop $\Phi$ injectief is. Stel namelijk dat dat $B, C \in V$. Dan

$$\begin{aligned}\Phi(AB) = \Phi(AC) &\iff \Phi(A)\Phi(B) = \Phi(A)\Phi(C) \\ &\iff \Phi(B) = \Phi(C) \\ &\iff B = C.\end{aligned}$$

$A$ is dus het enige element in $\ker(\Phi) \cap AV$. We hebben dus dat $\ker(\Phi)$ voldoet aan de eisen van het lemma: normaaldeler en discreet.

Nu is, zoals makkelijk na te gaan is, het centrum van $SU(2)$ de verzameling $\{I, -I\}$. Uit het lemma volgt dus dat $\ker(\Phi)$ ook is bevat in $\{I, -I\}$. $\square$

Gevolg is dus dat $SO(3)$ onmogelijk enkelvoudig samenhangend kan zijn. Het centrum van $SO(3)$ is $I$, en $SO(3)$ kan dus nooit isomorf zijn met $SU(2)$. Omdat enkelvoudige samenhangendheid isomorfie zou impliceren, is $SO(3)$ dit niet.

In hoofdstuk 3 gaan we deze dubbele overdekking gebruiken om representaties van $SO(3)$ te construeren.

## 2.3 Eindig-dimensionale representaties

Een belangrijk speciaal geval van de homomorfismen die we hebben bestuurd zijn de zogenaamde representaties. Dit is een manier om groepselementen te 'representeren' als lineaire operatoren in een bepaalde Hilbert ruimte $H$. In deze paragraaf zal ik het geval bespreken dat $H$ eindig-dimensionaal is. In veel gevallen zullen we ook proberen het oneindig-dimensionale geval tot deze situatie te reduceren. Allereerst de definitie van een representatie, ook gelding voor oneindige dimensie.

**Definitie 2.8.** Zij $G$ een matrix-Lie groep, en $V$ een Hilbertruimte. Een Lie groepen-representatie is een continu homomorfisme $\rho \colon G \to GL(V)$, waarbij we $GL(V)$, de groep van alle inverteerbare afbeeldingen over $V$. Als bovendien $\rho(G) \in U(V)$, de groep van unitaire transformaties, dan noemen we $\rho$ een unitaire representatie.

De notitie $\rho(A)v$ is vaak wat onhandig. Als er geen twijfel kan ontstaan over welke representatie gebruikt wordt, zal ik de notatie $A \cdot v$ gebruiken. Ook zal ik een representatie vaak aangeven als $(\rho, V)$.

In deze sectie neem ik aan dat V eindig-dimensionaal is, maar de definitie is in feite gelijk voor willekeurige Hilbertruimte. We hoeven hier alleen de eis van continuïteit af te zwakken. Hierover meer in de volgende sectie.

Naast representaties van groepen kunnen we natuurlijk ook kijken naar representaties van de bijbehorende algebra's. De definitie is soortgelijk.

**Definitie 2.9.** Zij $\mathfrak{g}$ een Lie algebra, en $V$ een Hilbertruimte. Een Lie algebra-representatie is een lineaire afbeelding $\tilde{\rho} \colon \mathfrak{g} \to gl(V)$ die de commutator behoudt:

$$\tilde{\rho}\left([X,Y]\right) = \left[\tilde{\rho}(X), \tilde{\rho}(Y)\right],$$

waarbij $gl(V)$ de verzameling van alle lineaire afbeeldingen over V is.

Ook hier gebruiken we vaak de hierboven ingevoerde notatie, als er geen verwarring kan optreden.

Het feit dat V eindig dimensionaal is impliceert dat $GL(V)$ als matrix-Lie groep beschouwd kan worden, en dat $\rho$ dus een Lie groepen homomorfisme is, en $\tilde{\rho}$ een Lie algebra homomorfisme. Alle resultaten uit de vorige twee secties zijn dus ook geldig voor representaties. In het bijzonder heeft dus elke $\rho$ een corresponderende $\tilde{\rho}$, en andersom als $G$ samenhangend en enkelvoudig samenhangend is.

**Definitie 2.10.** Zij $(\rho, V)$ een representatie van een groep $G$. Een deelruimte $W$ van $V$ noemen we invariant als $A \cdot w \in W \; \forall \, w \in W, A \in G$. We noemen een representatie $(\rho, V)$ irreducibel als de enige invariante ruimten in $V$ de verzamelingen $\{0\}$ en $V$ zelf zijn. Voor een Lie algebra-representatie $\tilde{\rho}$ gebruiken we dezelfde terminologie.

Het blijkt dat als G samenhangend is en $\rho$ en $\tilde{\rho}$ op de gebruikelijke manier corresponderen, dat de twee begrippen dan samenvallen:

- Stel $W$ invariant onder $G$, dan is $(\rho, W)$ een representatie van $G$ over $W$, en dus $(\tilde{\rho}, W)$ ook.
- Sel $W$ invariant onder $\mathfrak{g}$, dan $\tilde{\rho}(X)\colon W \to W$, $\tilde{\rho}(X)^m\colon W \to W$, en dus ook $\exp(\tilde{\rho}(X))\colon W \to W$ uit geslotenheid van W. Uit stelling 1.19 volgt dan het resultaat.

Het blijkt dat het principe van irreducibiliteit erg handig is voor het bepalen van de werking van representaties. Niet elke representatie hoeft irreducibel te zijn, maar hij is wel te schrijven als directe som van irreducibele representaties. Hier beschouwen we de directe som van twee representaties $\rho_1$ en $\rho_2$ op de natuurlijke manier:

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(A)(v, w) = (\rho_1(A)v, \rho_2(A)w)\,.$$

**Propositie 2.11.** *Laat $(\rho, V)$ een eindig-dimensionale representatie van een compacte groep $G$. Dan zijn er irreducibele deelruimten $V_i \in V$ zodat*

$$(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^{k} (\rho, V_i).$$

Hiervoor heb ik een klein lemma nodig, dat ik hier nog niet kan bewijzen. Het bewijs staat in sectie 1 van hoofdstuk 4.

**Lemma 2.12.** *Zij $(\rho, V)$ een representatie van een compacte groep $G$. Dan is er een inproduct $< .,. >$ op $V$ zodat $\rho$ unitair is met betrekking tot dit inproduct.*

*Bewijs van propositie 2.11.* We geven hier een constructie voor de $V_i$. Stel dat $V$ niet irreducibel is, als dat wel zo was waren we klaar. Er is dus een niet-triviale $W_1$ die invariant is onder $G$. We kunnen dan $V$ ontbinden als:

$$V \cong W_1 \oplus W_1^{\perp}.$$

Waar we het orhogonaal complement nemen onder het inproduct uit het lemma. Een korte berekening laat zien dat ook $W_1^{\perp}$ invariant moet zijn onder G. Stel $w \in W$, $w' \in W^{\perp}$, dan

$$< \rho(A)w', w > = < w', \rho(A)^* w > = < w', \rho(A^{-1})w > = 0.$$

We kunnen doorgaan met deze constructie op $W_1$ en $W_1^{\perp}$, zolang als de gevonden ruimtes niet irreducibel zijn. Omdat V eindig dimensionaal is, moet deze constructie na een eindig aantal stappen stoppen op de gewenste decompositie. $\square$

Het blijkt dat irreducibele representaties van een groep tot op zekere hoogte uniek zijn, en om deze reden is het handig om ze te bestuderen. 'Tot op zekere hoogte' behelst hier het isomorf zijn van de representaties, zoals hieronder is gedefiniëerd.

**Definitie 2.13.** Zij $(\rho_1, V_1)$ en $(\rho_2, V_2)$ twee representaties zijn van een groep $G$. Een lineaire afbeelding $T\colon V_1 \to V_2$ heft een vervlechtings-operator als hij voldoet aan:

$$T\rho_1(A)v = \rho_2(A)Tv \,\forall\, v \in V, A \in G.$$

Ofwel, in andere notatie:

$$T(A \cdot v) = A \cdot T(v) \,\forall\, v \in V, A \in G.$$

Als $T$ bovendien een isomorfisme is, dan noemen we $\rho_1$ en $\rho_2$ isomorf.

**Propositie 2.14** (Lemma van Schur)**.** *Stel dat $(\rho_1, V_1)$ en $(\rho_2, V_2)$ twee irreducibele representaties zijn van een groep $G$. Stel ook dat we een vervlechtings-operator $T$ hebben tussen $V_1$ en $V_2$. Dan $T = 0$ of $T$ is een isomorfisme. In het bijzonder: als $T\colon V \to V$ een vervlechtings-operator is van een irreducibele representatie $(\rho, V)$, dan is $T$ een constante maal de identiteit.*

*Bewijs.* We nemen aan dat $T \neq 0$, anders zijn we klaar.

- $T(V_1)$ is invariant, want

  $$A \cdot T(v) = T(A \cdot v) \in T(V_1).$$

  Uit irreducibiliteit volgt dat dat $T$ surjectief is.

- $\ker(T)$ is invariant, stel $v \in \ker(T)$, dan

  $$0 = A \cdot T(v) = T(A \cdot v).$$

  Uit irreducibiliteit volgt dat $T$ injectief is.

$T$ is dus een isomorfisme.

Voor het speciale geval: Uit bovenstaand resultaat volgt dat $T$ een isomorfisme is, of 0. Duidelijk voldoet $T = 0$, neem dus aan dat $T$ een isomorfisme is. In dit geval heeft $T$ een eigenvector $v$, bij eigenwaarde $c$, dan is de eigenruimte $E_c$ invariant:

$$T(A \cdot v) = A \cdot T(v) = cA \cdot v.$$

Omdat de enige invariant, niet-lege deelverzameling heel $V$ is, moet gelden dat $E_c = V$. Hieruit volgt dus dat $T = cI$. □

Voor dit speciale geval beschouwen we $V$ als complexe vectorruimte, om een eigenvector te mogen kiezen. Merk op dat we voor het eerste punt nergens de eindigheid van $V$ hebben gebruikt, dit resultaat is dus ook in oneindige dimensie geldig. Het speciale geval blijft ook geldig, maar niet met het bewijs zoals het hier gegeven is. In oneindige dimensie is er namelijk geen garantie op het bestaan van eigenvectoren.

## 2.4 Oneindig-dimensionale representaties

In het algemeen zijn de ruimtes waarover we representaties willen beschouwen niet eindig-dimensionaal, maar zijn $L^2(\mathbb{R}^3)$ of $L^2(S^2)$. Veel van de resultaten die we in eindige dimensie hadden zijn dan niet meer zonder meer geldig. Ook wordt de analyse veel moeilijker door het wegvallen van de eis van eindige-dimensie. Om deze reden zullen we vaak op zoek gaan naar eindig-dimensionale invariante deelruimten.

**Definitie 2.15.** Zij $G$ een matrix-Lie groep, en H een Hilbert-ruimte. Een unitaire representatie is een afbeelding $\rho\colon G \to U(H)$, zodat $\rho$ een sterk-continu groepenhomomorfisme is.

In veel gevallen zal ik de ingevoerde notaties uit de vorige sectie ook in oneindige dimensie aanhouden.

Herinner je dat sterke continuïteit impliceert dat als $A_m$ een rij in $G$ is die convergeert naar $A$, dat dan voor elke $\psi \in H$

$$\lim_{m\to\infty} \|A_m \cdot \psi - A \cdot \psi\| = 0.$$

Dit is een zwakkere continuiteits-eis is dan norm-convergentie in $B(H)$ (vergelijkbaar met het verschil tussen puntsgewijze en uniforme convergentie voor reële functies).

**Propositie 2.16.** *Zij $(\rho, H)$ een unitaire representatie, en zij $V \subset H$ een eindig-dimensionale invariante deelruimte. In dat geval is $(\rho, V)$ een eindig-dimensionale unitaire representatie.*

*Bewijs.* Merk op dat in eindige dimensie alle continuïteits-begrippen, die in oneindige-dimensie in principe echt verschillend zijn, samenvallen. Dus $(\rho, V)$ voldoet aan alle eisen om een representatie te zijn, omdat $V$ invariant is. □

Deze propositie legitimeert de tactiek om naar eindig-dimensionale invariante deelruimtes te zoeken. Als deze ruimtes samen bovendien de hele ruimte $H$ beslaan, hebben we de representatie compleet begrepen zonder ons zorgen te maken over het oneindig dimensionaal zijn van de beschouwde ruimte.

# Hoofdstuk 3

# Representaties van $SO(3)$

In dit hoofdstuk zal ik het belangrijkste voorbeeld en de motivatie van het eerder geschrevene uitwerken: De irreducibele representaties van $SO(3)$. Ik zal hier altijd aannemen dat deze representaties eindig dimensionaal zijn.

In het algemeen geldt dat alle irreducibele representaties van een compacte Lie groep eindig dimensionaal zijn, maar het bewijs hiervan berust op de stelling van Peter-Weyl. Ik zal aan het eind van het volgende hoofdstuk een bewijs geven, nadat deze stelling is bewezen. Dit legitimeert het feit dat ik alleen eindig dimensionale representaties beschouw.

Ik volg in dit hoofdstuk hoofdstuk 17 van [6], en hoofdstukken 6 en 7 van [7].

## 3.1 Representaties van $su(2)$ en $so(3)$

Bij het classificeren van alle irreducibele representaties van $SO(3)$ tot op isomorfie zullen we eerst de representaties van de bijbehorende Lie algebra beschouwen. Via de correspondentie tussen $SU(2)$ en $SO(3)$ kunnen we vervolgens alle representaties van $SO(3)$ verkrijgen. Merk op dat $su(2)$ en $so(3)$ isomorf zijn, en dat ze dus ook isomorfe representaties zullen hebben.

Herinner dat $SO(3)$ een basis $\{J_i\}$ had, waarbij de commutator cyclisch door de indices heen loopt, zie hiervoor sectie 2.2. Als $(\rho, V)$ een eindig dimensionale representatie is van $so(3)$, dan definiëren we

$$L_j = i\rho(J_j), \quad L_+ = L_1 + iL_2, \quad L_- = L_1 - iL_2. \tag{3.1}$$

Het is makkelijk de commutatierelaties van deze operatoren na te gaan, aangezien we uit het feit dat $\rho$ een representatie is weten dat $[\rho(J_1), \rho(J_2)] = \rho([J_1, J_2]) = \rho(J_3)$, en soortgelijk voor andere indices. Ik zal hier de verificatie aan de lezer over laten, om het argument helderder te laten. De commutatierelaties voor de L-operatoren zijn als volgt:

$$[L_1, L_2] = iL_3, \quad [L_3, L_+] = L_+, \quad [L_3, L_-] = -L_-, \quad [L_+, L_-] = 2L_3. \tag{3.2}$$

Ten slotte definiëren we de Casimir-operator $C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$. Deze commuteert met alle $L_i$, en vanwege het lemma van Schur is $C$ dus een constante $c$ maal de eenheid.

We beschouwen nu $L_3$. Omdat we over $\mathbb{C}$ werken heeft $L_3$ een eigenvector $v$ bij een eigenwaarde $\lambda$. We kunnen nu met behulp van de commutatierelaties inzien dat $L_\pm v$ weer een eigenvector is van $L_3$, bij eigenwaarde $\lambda \pm 1$.

$$L_3 L_\pm v = (L_\pm L_3 + [L_3, L_\pm])\, v = (\lambda \pm 1) L_\pm v$$

Omdat $L_3$ in eindige dimensie niet oneindig veel eigenvectoren kan hebben, moet er een $k$ zijn zodat $L_-^k v \neq 0$, maar $L_-^{(k+1)} v = 0$. We noemen nu $L_-^k v = v_0$, en $v_n = L_+^n v_0$. Wederom kunnen niet alle $v_n \neq 0$, dus moet er een $k$ zijn zodat $v_k \neq 0$, maar $v_{k+1} = 0$.

We hebben op deze manier dus een set eigenvectoren van $L_3$ vast gelegd. We hernoemen de eigenwaarden nu door $L_3 v_0 = \lambda_0 v_0$, en $L_3 v_n = (\lambda_0 + k) v_n$. Merk op dat de 'ladder' $W$ die we zo hebben gecreëerd een invariante deelruimte van $V$ is: $L_3$ blijft binnen W, en $L_+$ en $L_-$ ook. Omdat we irreducibele representaties beschouwen kunnen we dus concluderen dat $W = V$, en $\dim(V) = k + 1$. We noemen hier $l = k/2$ de 'spin' van de representatie, en we hebben dus $\dim(V) = 2l + 1$.

Merk nu op dat:

$$L_+ L_- = (L_1 + iL_2)(L_1 - iL_2) = L_1^2 + L_2^2 + i[L_2, L_1] = C - L_3^2 + L_3. \tag{3.3}$$

Waaruit snel volgt dat

$$L_- L_+ = L_+ L_- - [L_+, L_-] = C - L_3^2 - L_3. \tag{3.4}$$

We kunnen nu $\lambda_0$ bepalen. We passen $L_+ L_-$ toe op $v_0$, wat 0 geeft. We vinden dat $0 = c - \lambda_0^2 + \lambda_0$. Door $L_- L_+$ toe te passen op $v_{2l}$ vinden we dat $0 = c - (\lambda_0 + 2l)^2 - (\lambda_0 + 2l)$. Dit oplossen geeft dat $\lambda_0 = -l$, en $c = l(l+1)$.

We hebben dus een basis $\{v_n\}$ gevonden voor $V$, met $L_3 v_n = (-l + n) v_n$. Voor $L_1$ en $L_2$ zijn ook expliciete uitdrukkingen te bepalen, maar dat is voor onze doeleinden niet van belang. We noemen de gevonden (isomorfieklasse van) representaties $V_l$. Het bestaan van een representatie $V_l$ is gemakkelijk in te zien: Je definiëert de L-operatoren op $\mathbb{C}^{2l+1}$ via hun directe formule, en dit geeft de representatie.

Samenvattend, elke irreducibele representatie van $so(3)$ of $su(2)$ wordt gegeven door een 'ladder' van eigenvectoren van $L_3$.

## 3.2 Representaties van $SO(3)$

Nu we alle irreducibele representaties van $so(3)$ hebben gecategoriseerd, kunnen we dit proberen uit te breiden naar representaties van $SO(3)$. Voor enkelvoudig samenhangende en samenhangende groepen is de correspondentie 1-op-1, zoals in hoofdstuk 2 is besproken. Elke irreducibele representatie van $su(2)$ correspondeert dus op de gebruikelijke manier door de exponent met een representatie van $SU(2)$. We zullen zien dat dit voor $SO(3)$ niet zo werkt.

**Stelling 3.1.** *Elke irreducibele representatie van $so(3)$ met heeltallige spin correspondeert 1-op-1 met een irreducibele representatie van $SO(3)$.*

*Bewijs.* De eerste richting is duidelijk: een irreducibele representatie van een Lie groep induceert altijd een irreducibele representatie van zijn bijbehorende Lie algebra.

Voor de andere richting zal ik laten zien waarom representaties met halftallige spin onmogelijk zijn, en vervolgens via $SU(2)$ de representaties construeren met heeltallige spin.

Zij dus $(\Pi, V)$ een representatie met halftallige spin, en zij $\rho$ de bijbehorende Lie algebra representatie. We weten dat er een basis $\{v_n\}$ van eigenvectoren voor $L_3$ is. We berekenen nu:

$$\exp(-2\pi\rho(J_3))v_n = \exp(2\pi i L_3)v_n = \exp(2\pi i(-l+n))v_n = -v_n. \tag{3.5}$$

Dus $\exp(-2\pi\rho(J_3)) = -I$. Maar aan de andere kant is

$$\exp(-2\pi J_3) = I,$$

wat volgt uit directe berekening. Als $\Pi$ dus correspondeert met $\rho$ vinden we:

$$I = \Pi(I) = \Pi(\exp(-2\pi J_3)) = \exp(-2\pi\rho(J_3)) = -I,$$

wat een tegenspraak is.

Zij nu $(\rho, V)$ een heeltallige representatie van $SO(3)$, en $\rho$ de bijbehorende Lie algebra representatie. Herinner uit sectie 2.2 dat we een dubbele overdekking $\Phi$ van $SO(3)$ door $SU(2)$ hebben, met $\ker(\Phi) = \pm I$. Hierbij hoorde een isomorfisme $\phi$ tussen $so(3)$ en $su(2)$.

We maken nu een representatie $\rho'$ van $su(2)$ door $\rho' = \rho \circ \phi$. Omdat $SU(2)$ enkelvoudig samenhangend en samenhanged is, is er een irreducibele representatie $\Pi'$ die correspondeert met $\rho'$. We laten zien dat deze $\Pi'$ de verzameling $\{\pm I\}$ in zijn kern heeft bevat. Uiteraard geldt $\Pi'(I) = I$. We berekenen:

$$\Pi'(-I) = \Pi'(\exp(2\pi E_3)) = \exp(2\pi\rho'(E_3)) = \exp(2\pi\rho(F_3)) = \exp(2\pi i L_3) = I,$$

waar we in de laatste stap gebruiken dat de eigenwaarden van $L_3$ deze keer heeltallig zijn. We kunnen dus $\Pi$ op $A \in SO(3)$ definiëren door een element uit $\Phi^{-1}(A)$ te pakken, en hier $\Pi'$ op toe te passen. Omdat $\ker(\Phi) \subset \ker(\Pi')$, maakt de keuze niet uit. We hebben dus

$$\Pi' = \Pi \circ \Phi.$$

Bij $\Pi$ hoort ook een Lie algebra representatie $\sigma$. Uit bovenstaande vergelijking volgt nu dat $\rho' = \sigma \circ \phi$, oftewel $\sigma = \rho$ per definitie van $\rho'$. $\square$

Hiermee is onze classificatie van de irreducibele representaties van $SO(3)$ compleet.

## 3.3 Representaties in $L^2(S^2)$

De representatie van $SO(3)$ die voor ons het meest interessant is, is die van de rotatie van golffuncties in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Voor een $R \in SO(3)$ definiëren we een representatie door:

$$R \cdot \psi(x) = \psi(R^{-1}x) \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

In feite kunnen we dit aanscherpen tot een representatie op $L^2(S^2)$, waarbij $S^2$ de eenheidsbol in drie dimensies is, aangezien een rotatie $R$ alleen hoeken verandert, en het radiële deel invariant laat. We definiëren deze representatie natuurlijk met de zelfde formule. Het is eenvoudig te verifiëren dat deze werking een representatie is. Merk op dat deze representatie zelfs unitair is, vanwege:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(R^{-1}x)\phi(R^{-1}x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\phi(x)\det(R^{-1})dx = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(x)\phi(x)dx.$$

We gaan gebruik maken van ruimtes van homogene polynomen om $L^2(S^2)$ te bestuderen.

**Definitie 3.2.** Zij $P$ een polynoom over $\mathbb{R}^3$. We noemen $P$ homogeen van orde $l$ als de totale macht in elke term $l$ is. De vectorruimte van homogene polynomen van graad $l$ noemen we $P_l$.

Een basis voor $P_l$ is bijvoorbeeld $\{x^l, x^{l-1}y, x^{l-2}yz, \ldots, z^l\}$. Merk op dat elk polynoom in $P_l$ geschreven kan worden als:

$$P(x) = |x|^l P\left(\frac{x}{|x|}\right). \tag{3.6}$$

Homogene polynomen laten zich dus op unieke wijze begrenzen tot de sfeer $S^2$. Het maakt dus niet uit of we $P_l$ beschouwen als polynomen over $S^2$, of over $\mathbb{R}^3$. Je ziet hierdoor ook makkelijk in dat $P_l$ invariant is onder de actie van $SO(3)$.

Herinner je nu dat de Laplaciaan in $\mathbb{R}^3$ gegeven wordt door:

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

**Definitie 3.3.** Een polynoom $P$ over $\mathbb{R}^3$ heet harmonisch als geldt dat $\Delta P = 0$. De ruimte van harmonische, homogene polynomen noemen we $H_l \subset P_l$.

Ik zal in deze paragraaf aantonen dat $L^2(S^2)$ geschreven kan worden als de directe som van deze $H_l$, oftewel:

$$L^2(S^2) = \bigoplus_{l=1}^{\infty} H_l$$

Hiervoor zijn eerst een aantal lemma's en proposities nodig.

**Propositie 3.4.** *De dimensie van $H_l$ is $2l+1$.*

*Bewijs.* Eerst berekenen we de dimensie van $P_l$. Zoals boven al duidelijk werd, moeten we drie indices kiezen die samen optellen tot $l$. Een basis wordt namelijk gegeven door $x^i y^j z^k$. Stel dat de macht van $x$ gelijk is aan $k$, dan zijn er nog $l-k+1$ opties voor de macht van $y$. Hierna ligt de macht van $z$ vast. We vinden dus:

$$\dim(P_l) = (l+1) + (l) + \ldots + 1 = \frac{(l+1)(l+2)}{2}.$$

Nu gebruiken we dat $\Delta$ een lineaire afbeelding is van $P_l$ naar $P_{l-2}$, met $H_l$ als kern. We bewijzen dat $\Delta$ surjectief is om de dimensie van $H_l$ te bepalen. Hiervoor hoeven we alleen aan te tonen dat de $x^i y^j z^k$ in het beeld liggen. We doen dit met inductie naar $q = l - \max(i,j,k)$. We nemen hier voor het gemak aan dat $x$ altijd de hoogste macht heeft.

Het geval $q=0$ is duidelijk, aangezien $\Delta x^{l+2} = (l+2)(l+1)x^l$. Ook $q=1$ is makkelijk, aangezien $\Delta x^{l+1}y = (l+1)(l)x^{l-1}$.

Stel nu dat voor alle $q \leq Q$ het polynoom $x^{l-q}y^{j'}z^{k'}$ in het beeld van $\Delta$ ligt voor $j', k'$ willekeurig. Dan:

$$\Delta(x^{l-(Q-1)}y^j z^k) = (l-(Q-1))(l-Q)x^{l-Q+1}y^{j'}z^{k'} + x^{l-(Q-1)}\Delta(y^j z^k)$$

De eerste term ligt duidelijk in het beeld van $\Delta$, en de laatste ook vanwege de inductie-hypothese, aangezien $Q-1 < Q$. We concluderen dus dat $x^{l-(Q+1)}y^{j'}z^{k'}$ ook in het beeld moet liggen.

We zien dus dat $\dim(H_l) = \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{(l-1)(l)}{2} = 2l+1$ □

Merk op dat we hiermee ook gelijk vinden dat

$$P_l \cong H_l \oplus P_{l-2} \cong H_l \oplus H_{l-2} \oplus \ldots, \tag{3.7}$$

waarbij de ontbinding expliciet voor $p_l \in P_l$ neer komt op:

$$p_l = h_l + r^2 h_{l-2} + r^4 h_{l-4} + \ldots, \tag{3.8}$$

waarbij $h_m \in H_m$.

We willen nu gaan aantonen dat de $H_l$ irreducibel zijn. Omdat de Laplaciaan commuteert met rotaties, een feit dat ik bekend acht uit calculus, zien we al gelijk dat $H_l$ invariant is:

$$\Delta(R \cdot P) = R \cdot \Delta P = R \cdot 0 = 0$$

Voor irreducibiliteit zullen we expliciete uitdrukkingen nodig hebben voor de Lie algebra representatie horende bij de representatie van $SO(3)$ die we aan het bestuderen zijn. We berekenen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\exp(tJ_1)\cdot P(\mathbf{x})|_{t=0} &= \frac{d}{dt}P(\exp(-tJ_1)\mathbf{x})|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}P\begin{pmatrix} x \\ y+tz \\ z-ty\end{pmatrix}|_{t=0}\\ &= \left(z\frac{d}{dy}-y\frac{d}{dz}\right)P(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

En soortgelijk voor $J_2$ en $J_3$. We vinden dus de L-matrices uit de vorige sectie terug als:

$$L_1 = i\left(z\frac{d}{dy}-y\frac{d}{dz}\right) \tag{3.9}$$

$$L_2 = i\left(x\frac{d}{dz}-z\frac{d}{dx}\right) \tag{3.10}$$

$$L_3 = i\left(y\frac{d}{dx}-x\frac{d}{dy}\right) \tag{3.11}$$

$$L_+ = L_1 + iL_2 \tag{3.12}$$

$$L_- = L_1 - iL_2. \tag{3.13}$$

Hiervoor gelden inderdaad de commutatierelaties 3.2. Merk op dat uit het feit dat $R$ unitair is volgt dat de gevonden Lie algebra-representaties anti-hermitisch zijn, en dat de $L$-matrices dus hermitisch zijn. In het bijzonder is de Casimir-operator $C$ dus ook hermitisch.

**Propositie 3.5.** *De $H_l$ zijn irreducibele representaties van $SO(3)$, en $H_l \cong V_l$.*

*Bewijs.* We kijken naar $P = (x+iy)^l$. We hebben dan

$$\Delta P = (l)(l-1)((x+iy)^{l-2} - (x+iy)^{l-2})$$

Dus $P \in H_l$. Een zelfde berekening laat zien dat $L_3P = lP$ en $L_+P = 0$. We zien dus dat herhaaldelijk $L_-$ toepassen op P een 'ladder' van dimensie $2l+1$ oplevert, die irreducibel is onder de actie van $so(3)$, en dus ook onder $SO(3)$. Omdat $\dim(H_l) = 2l+1$ moeten we concluderen dat deze ladder de hele ruimte is, en dat $H_l$ dus irreducibel is onder $SO(3)$. □

**Propositie 3.6.** *Als $l \neq m$ zijn $H_l$ en $H_m$ orthogonaal in het gebruikelijke inproduct van $L^2(S^2)$.*

*Bewijs.* Zij $\pi$ de projectie van $L^2(S^2)$ op $H_m$, beperkt tot $H_l$. We zien gemakkelijk in dat $\pi$ een vervlechtings-operator is. Kies $P \in H_l$, en ontbind ten opzichte van $H_m$: $P = P^\perp + P^\parallel$. Dan

$$\pi(R\cdot P) = \pi(R\cdot P^\perp + R\cdot P^\parallel) = \pi(R\cdot P^\perp) + \pi(R\cdot P^\parallel) = R\cdot P^\parallel = R\cdot\pi(P).$$

In de een-na laatste gelijkheid gebruiken we dat R unitair is, en $H_m$ invariant onder R. Als dus $P^{\perp} \in H_m^{\perp}$, dan

$$< v_m | R \cdot P^{\perp} >=< R^{-1} \cdot v_m | P^{\perp} >= 0,$$

voor alle $v_m \in H_m$. Dan hebben we met het Lemma van Schur dat $\pi$ ofwel een isomorfisme is, of de 0-afbeelding. Maar $\pi$ kan geen isomorfisme zijn, want de dimensies van $H_l$ en $H_m$ zijn verschillend. Dus $\pi = 0$ en daarmee zijn $H_l$ en $H_m$ orthogonaal. $\square$

Nu kunnen we $L^2(S^2)$ gaan ontbinden. We weten uit functionaalanalyse dat de continue functies van $S^2$ naar $\mathbb{C}$ dicht in $L^2(S^2)$ liggen. Met de stelling van Stone-Weierstrass liggen de restricties van polynomen over $\mathbb{R}^3$ tot $S^2$ dicht in de continue functies. Nu kunnen we deze polynomen ontbinden in homogene stukken, en met vergelijking 3.8 verder tot harmoninsche polynomen. We vinden dus dat $\bigoplus_l H_l$ dicht ligt in $L^2(S^2)$. We hebben hiermee de volgende stelling bewezen:

**Stelling 3.7.** *$L^2(S^2)$ is gelijk aan de orthogonale Hilbert directe som van de $H_l$, dus*

$$L^2(S^2) = \widehat{\bigoplus_l} H_l$$

Hier is $\hat{\bigoplus}$ de norm-afsluiting van de algebraische, eindige som $\bigoplus$. Dit wordt vaak de Hilbert directe som genoemd.

# Hoofdstuk 4

# Stelling van Peter-Weyl

In dit laatste hoofdstuk zal ik de stelling van Peter-Weyl behandelen, die het resultaat uit het vorige hoofdstuk veralgemeniseerd. Deze stelling werdt voor het eerst bewezen door Herman Weyl en zijn student Fritz Peter, in het artikel [8].

In korte vorm zegt de stelling van Peter-Weyl dat voor een compacte groep $G$ geldt dat

$$L^2(G) \cong \widehat{\bigoplus_{(\Pi,V)}} V^* \otimes V.$$

Hier loopt de som over alle eindig-dimensionale irreducibele representaties van de groep $G$, die we aangeven met $(\Pi, V)$. Dit is ook een van de redenen dat irreducibele representaties interessant zijn om te bestuderen. Het is hier echter nog niet duidelijk wat $L^2(G)$ inhoudt, aangezien we integralen over groepen nog niet hebben gedefiniëerd.

Ik zal in dit hoofdstuk het bewijs uit [16] aanhouden, aangevuld met details uit [7].

## 4.1 De Haar-maat

De volgende stelling zegt dat we over onze groepen kunnen integreren. Dit resultaat is op zich vrij diep, en ik zal het bewijs hier verder niet behandelen. Voor een eenvoudige afleiding, zie bijvoorbeeld [3].

**Stelling 4.1.** *Zij $G$ een lokaal-compacte topologische groep. Dan is er een links-invariante maat $\mu$ op $G$, dat wil zeggen: voor alle $A \subset G$ meetbaar en $g \in G$ geldt dat*

$$\mu(gA) = \mu(A).$$

*Bovendien is deze maat uniek tot op een constante in $\mathbb{C}$.*

Deze maat leidt tot een links-invariante integraal $I = \int\limits_G dg$, en deze is ook uniek tot op een factor. Ik zal er hier verder niet op in gaan welke functies en verzamelingen meetbaar zijn, aangezien dit meer een maat-theoretisch probleem is. Ik verwijs hiervoor bijvoorbeeld door naar [12]. Ik zal gebruiken dat continue, compact gedragen functies integreerbaar zijn, een feit dat voor iedere fatsoenlijke maat geldig is.

Een aantal dingen in bovenstaande stelling vereisen verduidelijking. Merk ten eerste op dat alle groepen die wij beschouwen variëteiten zijn, en dus in het bijzonder lokaal-compact. In principe geldt het resultaat dus voor een grotere klasse aan groepen dan we hier beschouwen.

De links-invariantie komt neer op:

$$\int_G f(hg)dg = \int_G f(g)dg \quad \forall\ h \in G\ , f \text{ integreerbaar.}$$

Merk op dat dit voor de welbekende Lebesque-integraal over $\mathbb{R}$ ook het geval is: Een constante verschuiving van het argument in de integraal maakt geen verschil.

De stelling van Peter-Weyl betreft alleen compacte groepen. Als de groep G compact is heeft de Haar-integraal een paar extra mooie eigenschappen. Allereerst hebben we dat

$$\int_G 1dg < \infty,$$

aangezien $G$ compact is. We kunnen een Haar-integraal dus normaliseren zodat

$$\int_G 1dg = 1.$$

We zullen deze genormeerde integraal in het vervolg aanduiden als *de* Haar-integraal. Verder hebben we de volgende propositie:

**Propositie 4.2.** *Zij $G$ een compacte topologische groep, dan geldt dat de Haar-integraal rechts-invariant en inverse-invariant is. Dit houdt in dat $\forall h \in G\ , f \in C(G)$*

$$\int_G f(gh)dg = \int_G f(g)dg. \tag{4.1}$$

$$\int_G f(g^{-1})dg = \int_G f(g)dg. \tag{4.2}$$

*Bewijs.* We kunnen makkelijk zien dat $\int_G f(gh)dg$ en $\int_G f(g^{-1})dg$ twee links-invariante integralen zijn, die daarom op een factor gelijk zijn aan de Haar-integraal. Echter, door de de functie 1 te integreren met deze integralen zien we dat deze factor gelijk moet zijn aan 1. De Haar-integraal is dus gelijk aan de twee nieuwe integralen. $\square$

We kunnen nog een hoop bewijzen over de Haar-integraal, zoals bijvoorbeeld de stelling van Fubini, maar ik zal dit hier wederom nalaten. Weer verwijs ik naar [3], waar al deze feiten bewezen staan. Ik zal deze stellingen in het vervolg gebruiken waar nodig.

We kunnen nu $L^2(G)$ gaan definiëren. Dit is de ruimte van kwadratisch integreerbare functies (waarbij we we uitdelen naar gelijkheid bijna overal), en het inproduct op deze ruimte wordt gegeven door:

$$< f, h >= \int_G \overline{f(g)} h(g) dg$$

Ook hebben we op de gebruikelijk wijze een metriek op $L^2(G)$ door

$$d(f, g) =< f - g, f - g > \tag{4.3}$$

Een standaard resultaat uit maattheorie zegt dat de continue functies van $G$ naar $\mathbb{C}$ dicht liggen in de $L^2(G)$. Ik zal dit hier verder niet bewijzen.

Nu de we Haar-integraal hebben gedefiniëerd, kan ik eindelijk het bewijs geven van Lemma 2.12.

*Bewijs van Lemma 2.12.* Zij $(\rho, V)$ een representatie van een compact groep $G$, en zij $< ., . >$ een inproduct op V. We definieren een afbeelding $< ., . >'$ op $V \times V$ door

$$< v, w >'= \int_G < \rho(g)v, \rho(g)w > dg.$$

Het is makkelijk na te gaan dat deze afbeelding billineair is. Ook volgt positief-definietheid uit het feit dat $\rho$ continu is. Met andere woorden, $< ., . >'$ is een inproduct.

Nu zien we dat voor $h \in G$ geldt:

$$\begin{aligned} < \rho(h)v, \rho(h)w > &= \int_G < \rho(gh)v, \rho(gh)w > dg & (4.4) \\ &= \int_G < \rho(g)v, \rho(g)w > dg & (4.5) \\ &=< v, w > . & (4.6) \end{aligned}$$

We zien dus dat $\rho$ unitair is in dit inproduct. $\square$

## 4.2 Matrix-coëfficiënten

Voor de stelling van Peter-Weyl zijn de zogenaamde matrix-coëfficiënten van cruciaal belang. In deze sectie zijn alle representaties die ik beschouw eindig dimensionaal.

**Definitie 4.3.** Een matrix-coëfficiënt is een functie $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ van de vorm $\phi(g) = l(\pi(g)v)$, waarbij $(\pi, V)$ een (niet per se irreducibele) representatie is van $G$, $v \in V$ en $l \in V^*$. De ruimte van alle matrix-coëfficiënten van $G$ noteren we als $M_G$.

Merk op dat $M_G$ een ring is onder puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging, aangezien:

$$l_1(\pi_1(g)v_1) + l_2(\pi_2(g)v_2) = (l_1 \oplus l_2)((\pi_1 \oplus \pi_2)(v_1 \oplus v_2))$$
$$l_1(\pi_1(g)v_1) \times l_2(\pi_2(g)v_2) = (l_1 \otimes l_2)((\pi_1 \otimes \pi_2)(v_1 \otimes v_2)),$$

per definitie van de directe som en het tensor-product van twee representaties.

We beperken ons nu tot de matrix-coëfficiënten van een enkele representatie $(\pi, V)$ en we definieren:

$$M_\pi = \mathrm{Span}\{l(\pi(g)v) \mid v \in V, l \in V^*\},$$

waarbij we $l(\pi(g)v)$ beschouwen als functie van g. Elementen van $M_\pi$ noemen we matrix-coëfficiënten van de representatie $\pi$. Merk op dat de dimensie van $M_\pi$ begrensd is door $\dim(V)^2$, aangezien we maar $\dim(V)$ onafhankelijke keuzes voor $l$ en $v$ kunnen maken.

**Definitie 4.4.** Zij $f\colon G \to \mathbb{C}$ een functie. We noemen $f$ rechts-$G$-eindig als de functies $\{f(xg)\}_{g\in G}$ een eindig-dimensionale vectorruimte opspannen.

Deze definitie lijkt misschien wat vreemd, maar het blijkt dat deze eigenschap precies karakteriseerd welke functies matrix-coëfficienten zijn.

**Propositie 4.5.** *Zij $f\colon G \to \mathbb{C}$, dan is $f$ een matrix-coëfficiënt $\iff$ $f$ is rechts-$G$-eindig.*

*Bewijs.* Voor de eerste implicatie, zij $f(x) = l(\pi(x)v)$ voor een representatie $(\pi, V)$. Dan berekenen we:

$$f(xg) = l(\pi(x)(\pi(g)v)).$$

Dit is ook weer een matrix-coëfficiënt van $\pi$ bij $l$ en $\pi(g)v$. Aangezien $\dim(M_\pi) < \dim(V)^2$ hebben we dus ook $\dim(\mathrm{Span}\{f(xg)\}_{g\in G}) < \infty$.

In de andere richting, stel dat $V = \mathrm{Span}\{f(xg)\}_{g\in G}$ eindige dimensie heeft. In dat geval maken we een eindig-dimensionale representatie $(\rho, V)$ door de formule

$$\rho(g)f(x) = f(xg).$$

Zij nu $l \in V^*$ de evaluatie afbeelding in de eenheid van $G$, dus $l(f(x)) = f(1)$. We berekenen dan:

$$l(\rho(g)f(x)) = l(f(xg)) = f(g),$$

waaruit we zien dat $f$ een matrix-coëfficiënt is van de representatie $\rho$. $\square$

We zullen deze karakterisering later gebruiken bij het bewijs van de stelling van Peter-Weyl.

Een laatste feit dat we zullen gebruiken is dat de matrix-coëfficiënten van verschillende irreducibele representaties loodrecht op elkaar staan. We zullen hiervoor de Stelling van Riesz-Frechet gebruiken om $V^*$ met $V$ te identificeren: Elke $l \in V^*$ is te schrijven als het inproduct met een vector $v \in V$.

**Propositie 4.6** (Schur Orthogonaliteit)**.** *Zij $(\rho, V)$ en $(\pi, W)$ twee eindig-dimensionale irreducibele unitaire representaties van een compacte groep G. Dan hebben we:*

$$\int\limits_G \overline{< v_1, \rho(g)v_2 >} < w_1, \pi(g)w_2 > dg = \begin{cases} 0, & \textit{als } \rho \ncong \pi, \\ \frac{< w_1, v_1 >< v_2, w_2 >}{\dim(V)}, & \textit{als } \rho \cong \pi. \end{cases} \tag{4.7}$$

*Hierbij identificeren we in het tweede geval $V$ met $W$ om het inproduct te nemen, om compactheid van de vergelijkingen te bewaren.*

*Bewijs.* We kijken naar de operator $Tu = \int\limits_G \pi(g)u\rho(g)^{-1}dg$ voor een continue lineaire operator $u$ van $V$ naar $W$. Deze operator is gedefinieerd via zijn werking in het een inproduct, dat wil zeggen:

$$< w, Tu\ v >= \int\limits_G < w, \pi(g)u\rho(g)^{-1}v > dg \tag{4.8}$$

Het is makkelijk na te gaan dat deze afbeelding een vervlechtings-operator is, dit volgt uit invariantie van de integraal. We nemen nu $u = |w_2 >< v_2|$, ofwel $u(x) =< v_2, x > w_2$. We zien dat

$$\begin{aligned} < w_1, Tu\ v_1 > &= \int\limits_G < w_1, \pi(g)|w_2 >< v_2|\rho(g)^{-1}v_1 > dg \\ &= \int\limits_G < w_1, \pi(g)w_2 > \overline{< v_1, \rho(g)v_2 >}, \end{aligned}$$

wat precies de kwantiteit is die we beschouwen. Als nu de twee representaties niet isomorf zijn, moet met het Lemma van Schur, Propositie 2.14, gelden dat $Tu = 0$, waarmee het resultaat volgt. Als geldt dat de twee representaties isomorf zijn en $\dim(V) < \infty$, zodat de uitdrukking in de stelling gedefinieerd is, dan geldt met het Lemma van Schur dat $Tu = cI$ voor een constante $c$. We berekenen het spoor van $Tu$:

$$\mathrm{Tr}(Tu) = c\dim(V) = \int\limits_G \mathrm{Tr}(\rho(g)u\rho(g^-1)) = \int\limits_G \mathrm{Tr}(u)) = Tr(u) =< v_2, w_2 > .$$

We vinden dus dat $c = \frac{< v_2, w_2 >}{\dim(V)}$. Dit geeft dat

$$< w_1, Tu\ v_1 >= \frac{< w_1, v_1) < v_2, w_2 >}{\dim(V)},$$

zoals gewenst. □

Het is belangrijk om op te merken dat de eerste helft van de vorige propositie ook geldig is als een van de representaties oneindige dimensie heeft. Dit is het geval omdat de eerste helft van Propositie 2.14 ook in oneindige dimensie geldig is.

## 4.3 Convoluties en Arzela-Ascoli

Een belangrijke stelling die we in het vervolg nodig hebben is de stelling van Arzela-Ascoli. Hiervoor is eerst een definitie nodig.

**Definitie 4.7.** Zij $X$ een topologische ruimte, $Y$ een metrische ruimte en $F$ een verzameling functies van $X \to Y$. We noemen $F$ equicontinu als voor alle $x \in X$, $\epsilon > 0$ er een open omgeving $U$ is van $x$ zodat

$$d(f(x), f(x')) < \epsilon \;\forall\; x' \in U \;, f \in F$$

Equicontinuiteit is in feite dus het continu zijn van alle functies in $F$ tegelijkertijd. Merk op dat in het bijzonder elke functie in $F$ continu is. We kunnen nu de stelling van Arzela-Ascoli stellen:

**Stelling 4.8** (Stelling van Arzela-Ascoli)**.** *Zij $X, Y$ als boven en $F$ een familie van equicontinue functies. Stel dat bovendien $X$ en $Y$ compact zijn, dan bevat elke rij in $F$ een uniform convergente deelrij.*

*Bewijs.* Stel dat $(f_n)$ een rij is in $F$, en zij $\epsilon > 0$. Zoek voor elke $x \in X$ een omgeving $U_x$ zodat

$$d(f(x), f(x')) < \epsilon/3 \quad \forall x' \in U_x \;, f \in F.$$

Dit geeft een open overdekking van $X$, waarvan we vanwege compactheid een eindige deeloverdekking $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots U_{x_N}\}$ kunnen vinden.

Nu gebruiken we de compactheid van $Y$, om een deelrij $(f_n^1)$ van $(f_n)$ te vinden zodat $f_n^1(x_1)$ convergent is. We kunnen dit herhalen met $(f_n^1)$ in plaats van $(f_n)$. We vinden dus een deelrij $(f_n^2)$ van $(f_n^1)$ zodat ook $f_n^2(x_2)$ convergeert. Doen we dit $N$ keer, dan vinden we een rij $f_n^N$ zodat $f_n^N(x_i)$ convergeert voor alle $x_i$.

Nu kunnen we afschatten voor $x \in U_{x_i}$:

$$\begin{aligned} d(f_n^N(x), f_m^N(x) &\leq d(f_n^N(x), f_n^N(x_i)) + d(f_n^N(x_i), f_m^N(x_i)) \\ &\quad + d(f_m^N(x_i), f_m^N(x) \\ &\leq 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

voor $n, m$ groot genoeg. Als we nu het begin van de rij weglaten, komen we uit op een deelrij $(\psi_n)$ van $(f_n)$ zodat $d(\psi_n, \psi_m) < \epsilon$ in sup-norm voor alle $n, m$.

We passen deze constructie nu inductief toe met $\epsilon = 1/m$. Dit geeft dus rijen $(\psi_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, waarbij $(\psi_n^k)$ deelrij is van $(\psi_n^{k-1})$ en $d(\psi_n^k, \psi_m^k) < 1/k$ in de sup-norm.

Ten slotte gaan we nu over op de rij $\phi_n = \psi_n^n$. Deze is uniform Cauchy: zij $n \leq m$

$$d(\phi_n, \phi_m) = d(\psi_n^n, \psi_m^m) = d(\psi_n^n, \psi_{m'}^n) \leq 1/n.$$

Waarbij we gebruiken dat $(\psi_k^m)$ een deelrij is van $(\psi_k^n)$, aangezien $n \leq m$. Aangezien $Y$ compact is, geldt dat $(\phi_n)$ dus ook convergent is. $\square$

We definiëren de convolutie van twee integreerbare functies $f_1, f_2$ door:

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(xg^{-1}) f_2(g) dg.$$

We zullen bewijzen dat voor een $\phi \in C(G)$ de convolutie-operator $A_\phi$, gegeven door

$$(A_\phi f)(x) = (\phi * f)(x) \tag{4.9}$$

een compacte, zelf-geadjugeerde operator is op $L^2(G)$. We kunnen dan de spectraal-stelling voor compacte operatoren toepassen. Hiervoor eerst een klein lemma.

**Lemma 4.9.** *Zij $f$ een integreerbare functie over $G$. Dan*

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$$

*Bewijs.* Met Cauchy-Schwarz:

$$\|f\|_1 =< |f|, 1 >\leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \|f\|^2.$$

$$\|f\|_2^2 = \int_G |f(g)|^2 dg \leq \|f\|_\infty^2.$$

$\square$

**Lemma 4.10.** *Zij $\phi \in C(G)$, dan is $A_\phi$ een begrensde operator van $L^1(G)$ naar $L^\infty(G)$. Ook geldt dat*

$$\|A_\phi f\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1. \tag{4.10}$$

*Bewijs.* We schatten af:

$$|A_\phi f(x)| \leq \int_G |\phi(xg^{-1}) f(g)| dg \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1,$$

dus zeker ook $\|A_\phi f\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1$ $\square$

**Propositie 4.11.** *Zij $\phi \in C(G)$, dan is $A_\phi$ een compacte operator over $L^2(G)$.*

*Bewijs.* Eerst laten we zien dat $A_\phi$ op $L^2(G)$ begrensd is, waar we gebruiken maken van lemma 4.9 en 4.10:

$$\|A_\phi f\|_2 \leq \|A_\phi f\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2.$$

We zullen nu de stelling van Arzela-Ascoli gebruiken om te bewijzen dat $A_\phi$ compact is. Zij

$$C = \{A_\phi f \mid f \in L^2(G)\ , \|f\|_2 = 1\}.$$

We gebruiken nu het feit dat $G$ compact is. Om deze reden is $\phi$ in het bijzonder uniform continu. We kunnen dus een omgeving $U$ van de identiteit vinden zodat voor alle $x \in G$, $y \in U$ geldt dat

$$|\phi(yx) - \phi(x)| < \epsilon.$$

voor $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan vinden we dat:

$$\begin{aligned} |(A_\phi f)(yx) - (A_\phi f)(x)| &= \left| \int_G f(g)(\phi(yxg^{-1}) - \phi(xg^{-1})) \right| \\ &\leq \int |f(g)||\phi(yxg^{-1}) - \phi(xg^{-1})| \\ &\leq \epsilon \|f\|_1 \\ &\leq \epsilon \|f\|_2 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

We zien dus dat $C$ een equicontinue familie functies is in de $L^\infty(G)$-topologie. Met Lemma 4.9 zien we dat de $L^\infty(G)$-topologie bevat is in de $L^2(G)$-topologie, en daarom is $C$ ook equicontinu in de $L^2(G)$-topologie.

We kunnen de conclusie trekken dat $C$ met Arzela-Ascoli rijen-compact is, en vanwege het feit dat $L^2(G)$ metrisch is dus in het bijzonder ook compact. □

**Propositie 4.12.** *Laat $A_\phi$ als boven. Als geldt dat $\phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$, dan is $A_\phi$ zelf-geadjugeerd.*

*Bewijs.* We gebruiken de stelling van Fubini, die hier altijd geldig is vanwege de compactheid van G. We mogen om deze reden intergratie-volgorde omdraaien.

We zien nu direct dat:

$$\begin{aligned}
< f_1, A_\phi f_2 > &= \int_G \overline{f_1(g)} \left( \int_G \phi(gh^{-1}) f_2(h) dh \right) dg \\
&= \int_G \overline{f_1(g)} \left( \int_G \overline{\phi(hg^{-1})}) f_2(h) dh \right) dg \\
&= \int_G \left( \overline{\int_G f_1(g) \phi(hg^{-1}) dg} \right) f_2(h) dh \\
&= \int_G \overline{(A_\phi f_1)(h)} f_2(h) dh \\
&= < A_\phi f_1, f_2 >
\end{aligned}$$

Waarmee we zien dat $A_\phi$ zelf-geadjugeerd is. □

We zien dus dat een dergelijk gekozen $\phi$ tot gevolg heeft dat we de spectraalstelling voor compacte zelf-geadjugeerde operatoren mogen gebruiken. Zie voor deze stelling een willekeurig boek over functionaal-analyse, zoals bijvoorbeeld [4]. We hebben dus een set eigenwaarden $\lambda_i$ van $A_\phi$, en 0 is het enige limietpunt van deze verzameling. Ook is $M_{\lambda_i}$, de eigenruimte bij $\lambda_i$, eindig dimensionaal als $\lambda_i \neq 0$.

Een laatste belangrijk lemma voordat ik me met het bewijs van de stelling van Peter-Weyl zal bezig houden is de volgende.

**Lemma 4.13.** *Zij $M_\lambda \subset L^2(G)$ de eigenruimte van $A_\phi$ bij eigenwaarde $\lambda$, met $A_\phi$ als in de vorige propositie. Dan is $M_\lambda$ invariant onder rechts-translatie met $G$.*

*Bewijs.* Dit is een eenvoudige berekening. Definieer de rechts getransleerde van $f \in M_\lambda$ door $f_g(x) = f(xg)$.

$$\begin{aligned}
(A_\phi f_g)(x) &= \int_G \phi(xh^{-1}) f(hg) dh \\
&= \int_G \phi(xgh^{-1}) f(h) dh \\
&= (A_\phi f)(xg) \\
&= \lambda f(xg)
\end{aligned}$$

□

## 4.4 Stelling van Peter-Weyl

We zullen hier gaan bewijzen dat de matrix-coëfficiënten van $G$ dicht liggen in $C(G)$. De rest van het bewijs volgt hierna gemakkelijk. Herinner dat een functie $f$ een matrix-coëfficiënt is precies dan als hij rechts-$G$-eindig is. We zullen dit feit gebruiken om een willekeurige continue functie te benaderen.

**Stelling 4.14.** *De matrix-coëfficiënten van $G$ liggen dicht in $C(G)$, beschouwd met de topologie van de sup-norm.*

*Bewijs.* Zij $f \in C(G)$ een continue functie, en zij $\epsilon > 0$. Vanwege compactheid van $G$ is $f$ ook uniform continu. We hebben dus een omgeving $U$ van de identiteit zodat $|f(yx) - f(x)| < \epsilon/2$ voor $x \in G$ en $y \in U$.

We gaan over op $V = U \cap U^{-1}$, wat ook een open omgeving is van de identiteit. We kiezen nu een positieve, continue functie $\psi$ met drager in $V$. We maken nu de functie $\phi$ door:

$$\phi(x) = C(\psi(x) + \psi(x^{-1})).$$

Waarbij we $C \in \mathbb{R}$ gebruiken om $\phi$ te normaliseren op 1 Merk op dat de drager van $\phi$ bevat is in $V$, en dat $\phi(x^{-1}) = \phi(x)$. We zien dat $A_\phi f$ in dat geval $f$ benadert:

$$\begin{aligned}
|A_\phi f(x) - f(x)| &= \left| \int_G \phi(xg^{-1}) f(g) dg - \int_G \phi(g) f(x) dg \right| \\
&\leq \int_G \phi(g) |f(g^{-1}x) - f(x)| \\
&\leq \epsilon/2
\end{aligned}$$

Aangezien $\phi$ gedragen wordt in $U$. We hebben dus in de sup-norm dat

$$\|A_\phi f - f\|_\infty \leq \epsilon/2.$$

Omdat $A_\phi$ een compacte zelf-geadjugeerde operator is, kunnen we nu de spectraal-stelling toepassen. We kunnen $f$ ontbinden ten opzichte van eigenvectoren van $A_\phi$:

$$f = \sum_{\lambda \in \sigma(A_\phi)} f_\lambda.$$

We schrijven $f$ nu als som van drie delen:

$$f = f_0 + \sum_{0 < |\lambda| < \delta} f_\lambda + \sum_{|\lambda| > \delta} f_\lambda = f_0 + f_\delta + f_+,$$

Waarbij dus $f_+ \in \bigoplus_{|\lambda| > \delta} M_\lambda = X$. Omdat 0 het enige verdichtingspunt is van het spectrum van $A_\phi$ en $M_\lambda$ eindig dimensionaal is voor elke $\lambda$ , moet gelden dat $X$

eindig dimensionaal is. Uit Lemma 4.13 zien we ook dat $X$ invariant is onder rechts translatie. Gecombineerd geeft dit dat elk element uit $X$ recht-$G$-eindig is, en daarom een matrix-coëfficiënt met Propositie 4.5 .

In het bijzonder geldt dat $A_\phi f_+ \in X$, en dit is dus een matrix coëfficiënt. Met deze functie gaan we f benaderen:

$$\begin{aligned}\|f - A_\phi f_+\|_\infty &\leq \|f - A_\phi f\|_\infty + \|A_\phi(f - f_+)\|_\infty \\ &\leq \epsilon/2 + \|A_\phi(f_0 + f_\delta)\|_\infty \\ &\leq \epsilon/2 + \|\phi\|_\infty \|f_\delta\|_1\end{aligned}$$

Het rest dus allen nog om $\|f_\delta\|_1$ klein te krijgen. Merk op dat uit orthogonaliteit van de eigenruimtes van $A_\phi$ volgt dat:

$$\|f\|_2^2 = \sum_\lambda \|f_\lambda\|^2 < \infty. \tag{4.11}$$

Nu zijn de eigenwaarden van $A_\phi$ hoogstens aftelbaar. Als we $\delta$ dus klein genoeg nemen krijgen we dat

$$\left(\sum_{0<|\lambda|<\delta} |f_\lambda|\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{2\|\phi\|_\infty}.$$

We vinden dus dat

$$\|f - A_\phi f_+\|_\infty < \epsilon,$$

en dit is wat bewezen moest worden. □

De stelling van Peter-Weyl volgt nu gemakkelijk:

**Stelling 4.15** (Stelling van Peter-Weyl)**.** *De matrix-coëfficiënten van $G$ liggen dicht $L^2(G)$, en we kunnen dus schrijven:*

$$L^2(G) \cong \hat{\bigoplus_{(\pi,V)}} V^* \otimes V. \tag{4.12}$$

*Hier loopt de directe som over alle eindig-dimensionale irreducibele representaties van $G$.*

*Bewijs.* De matrix-coëfficiënten van $G$ liggen in $L^\infty(G)$ dicht in $C(G)$, en omdat de $L^2$-topologie de $L^\infty$-topologie bevat, liggen de matrix-coëfficiënten ook in $L^2(G)$ dicht in $C(G)$. Omdat $C(G)$ dicht ligt in $L^2(G)$, liggen de matrix coëfficiënten ook dicht.

Bovendien geldt duidelijk ook dat $M_\pi \cong V^* \otimes V$. Elke matrix-coëfficiënt wordt namelijk bepaald door een element uit $V^*$ en een element uit $V$. Ten slotte volgt orthogonaliteit natuurlijk uit Propositie 4.6. □

Op zich zegt vergelijking 4.12 eigenlijk niets anders dan dat twee separabele Hilbert-ruimtes isomorf zijn, wat een basaal resultaat is. De echte kracht is hoe de conjugatie-werking van $G \times G$ door dit isomorfisme heen werkt. We definiëren deze werking op $L^2(G)$ door:

$$((g, h) \cdot f)(x) = f(g^{-1}xh), \tag{4.13}$$

voor $g, h \in G$. Aan de andere kant van het isomorfisme werkt $g$ op $V^*$ door:

$$g \cdot l = l \circ \pi(g)^{-1}$$

volgens de representatie $\pi$. De werking van $h$ op $V$ gaat uiteraard via de gebruikelijke representatie. Voor een matrix-coëfficiënt geldt namelijk dat:

$$(g, h) \cdot l(\pi(x)v) = l(\pi(g^{-1}xh)v) = (l \circ \pi(g)^{-1})(\pi(x)(\pi(h)v)) \tag{4.14}$$

Als we $l$ schrijven als het inproduct nemen met een vector $w$, wat kan volgens Riesz-Frechet, en aannemen dat $\pi$ unitair is, wordt dit:

$$(g, h) \cdot < w, (\pi(x)v >=< w, \pi(g^{-1}xh)v >=< \pi(g)w, \pi(x)(\pi(h)v) > \tag{4.15}$$

We zien dus dat $g$ werkt op de eerste 'kopie' van $V$, en $h$ op de tweede.

## 4.5 Gevolgen

De stelling van Peter-Weyl heeft vele belangrijke gevolgen. Allereerst volgt gemakkelijk dat alle irreducibele representaties van een compacte groep eindig-dimensionaal zijn. Dit is gevolg van het feit dat de directe som in de stelling van Peter-Weyl loopt over alle **eindig-dimensionale** irreducibele representaties.

**Stelling 4.16.** *Zij $(\pi, V)$ een irreducibele representatie van een compacte groep $G$. Dan is $V$ eindig dimensionaal.*

*Bewijs.* Stel dat V oneindig dimensionaal is. We gebruiken Propositie 4.6, waar we expliciet **niet** hebben gebruikt dat de representaties eindig-dimensionaal hoefden te zijn. We zien dus dat de matrix-coëfficiënten van $\pi$ loodrecht staan op alle eindig-dimensionale matrix-coëfficiënten. Maar volgens Peter-Weyl liggen deze dicht in $L^2(G)$.

De matrix-coëfficiënten van $(\pi, V)$ staan dus loodrecht op een dichte deelruimte, en moeten daarom allemaal 0 zijn. Maar in dat geval is $\pi(g) = 0 \; \forall g \in G$, en dan is $\pi$ geen representatie, omdat $\pi(e) \neq I$. We concluderen dat $V$ eindige dimensie moet hebben. $\square$

Ik zal ten slotte nog twee krachtige toepassingen van Peter-Weyl geven. Allereerst zal ik laten zien dat Fourier-theorie uit de stelling volgt, en daarna dat de ontbinding van $L^2(S^2)$ uit het vorige hoofdstuk ook af te leiden is. Het centrale resultaat in de Fourier-analyse van de ruimte $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, of $\mathbb{T}$, is dat we kunnen ontbinden in termen van complexe e-machten. We schrijven dit compact op als:

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}$$

We zullen dit zelfde resultaat direct afleiden uit Peter-Weyl. Allereerst hebben we hier natuurlijk de irreducibele representaties van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ voor nodig. Ik behandel eerst een klein gevolg van het lemma van Schur voor abelse groepen.

**Propositie 4.17.** *Zij $G$ een compacte, abelse groep, en $(\pi, V)$ een irreducibele representatie van $G$, dan* $\dim(V) = 1$.

*Bewijs.* We zien in voor $g, h \in G$:

$$\pi(g)\pi(h) = \pi(gh) = \pi(hg) = \pi(h)\pi(g),$$

wat inhoudt dat $\pi(h)$ een vervlechtings-operator is. Met het lemma van Schur volgt hieruit dat $\pi(h) = \lambda I$. Elke een-dimensionale deelruimte is dus invariant. De representatie kan dus alleen irreducibel zijn als $V$ zelf ook een-dimensionaal is. □

Er geldt dus voor een irreducibele representatie van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dat $V \cong \mathbb{C}$. We kunnen $\pi$ dus beschouwen als een afbeelding van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{C}$, aangezien elke lineaire afbeelding op een een-dimensionale ruimte vermenigvuldiging met een factor is.

Ook moet gelden dat het beeld onder $\pi$ van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ compact is vanwege continuiteit. Hieruit volgt dat $|\pi(g)| = 1$, als namelijk $|\pi(g)| \neq 1$ dan volgt dat $|\pi(g)|^{\pm n} \to \infty$ als $n$ groot word. We moeten dus alle karakters van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vinden, de homomorfismen naar de torus $\mathbb{T}$.

Hiervoor bepalen we eerst de karakters van $\mathbb{R}$. Een voor de hand liggend karakter is $\chi_y(x) = e^{2\pi iyx}$, dit blijken ook alle karakters te zijn.

**Lemma 4.18.** *De $\chi_y$ zijn alle karakters van $\mathbb{R}$.*

*Bewijs.* Zij $\chi$ een karakter van $\mathbb{R}$. Omdat $\chi(0) = 1$ en $\chi$ continu is, bestaat er een $\epsilon > 0$ zodat $\Re(\chi(x)) > 0$ als $|x| < \epsilon$. Dit houdt in dat het interval $(-\epsilon, \epsilon)$ wordt afgebeeld in de rechter halve cirkel.

We schrijven nu $\chi(\epsilon) = e^{2\pi iy\epsilon}$ voor een $y \in \mathbb{R}$. Dan moet gelden dat

$$\chi(\epsilon/2)^2 = \chi(\epsilon) = e^{2\pi iy\epsilon}.$$

Dit houdt in dat $\chi(\epsilon/2) = \pm e^{2\pi iy\epsilon/2}$. Per keuze van $\epsilon$ is het plus-teken correct. We kunnen dit herhalen om voor $p, k \in \mathbb{Z}$ te vinden dat:

$$\chi\left(\frac{p\epsilon}{2^k}\right) = \exp\left(2\pi i\frac{p\epsilon}{2^k}\right).$$

Omdat getallen van deze vorm dicht liggen in $\mathbb{R}$ en $\chi$ continu is vinden we dat

$$\chi(x) = e^{2\pi ixy},$$

zoals gewenst. □

We gebruiken nu dat de karakters van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ precies de karakters zijn van $\mathbb{R}$ die constant zijn op $\mathbb{Z}$. We zien dus dat alle karakter van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ van de volgende algemene vorm zijn:

$$\chi_k(x) = e^{2\pi ikx} \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{4.16}$$

aangezien $y \cdot 1 \in \mathbb{Z}$.

De matrix-coëfficiënten volgen nu makkelijk. Zij $f$ de eenheidsvector in $\mathbb{C}$, dan is

$$< f, e^{2\pi ikx} f >= e^{2\pi ikx}.$$

De matrix-coëfficiënten zijn in dit geval dus de karakters. We kunnen dit samenvatten als:

$$L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx},$$

wat precies het centrale resultaat is van Fourier-theorie. Merk op dat de enige inspanning die hiervoor nodig is bestaat uit het bepalen van de karakters van $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Met de stelling van Peter-Weyl tot onze beschikking is dit zeker veel makkelijker dan de stelling rechtstreeks te bewijzen.

Ten slotte beschouw ik hier nog $L^2(S^2)$. We beschouwen de baan van de noordpool $N = (0, 0, 1)$ in $S^2$ onder $SO(3)$, dit is geheel $S^2$. De stabilisator van $N$ is de verzameling:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} \mid A \in SO(2) \right\}$$

Dit zijn de rotaties om de $z$-as heen, die duidelijk isomorf zijn met $SO(2)$. We vinden dus met het orbit-stabilizer theorem:

$$S^2 \cong SO(3)/SO(2). \tag{4.17}$$

Continuiteit van dit isomorfisme volgt uit het feit dat de werking van $SO(3)$ continu is, en dat de projectie $SO(3) \to SO(3)/SO(2)$ per definitie ook continu is.

Nu kunnen we voor een ondergroep $K \subset G$ complexe functies op $G/K$ identificiëren met rechts-$K$-invariante functies op $G$. Dit doen we door voor $f : G/K \to \mathbb{C}$ een functie $\tilde{f}$ op $G$ te maken door $\tilde{f}(g) = f(gK)$. We zien dan

$$\tilde{f}(gk) = f(gkK) = f(gK) = \tilde{f}(g),$$

deze functie is dus rechts-$K$-invariant.

Andersom maken we van een $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ die rechts-$K$-invariant is een functie $f$ op $G/K$ door

$$f(gK) = \tilde{f}(g),$$

wat welgedefinieerd is vanwege de invariantie van $\tilde{f}$.

Ten slotte geldt dat voor willekeurige Lie groepen $G$ en $K \in G$ compact dat $G/K$ een $G$-invariante maat heeft, die uniek is tot op een factor. Voor een bewijs, zie bijvoorbeeld [14]. De maat op $S^2$ is $SO(3)$-invariant, maar we kunnen ook een andere invariante integraal maken door:

$$I(f) = \int_{SO(3)} \tilde{f}(g)dg. \tag{4.18}$$

Deze twee zijn dus via een factor aan elkaar verbonden. We vinden dus dat:

$$L^2(S^2) \cong L^2(SO(3))^K$$

Waarbij $L^2(SO(3))^K$ voor de rechts-$K$-invariante $L^2$-functies staat. We gebruiken ten slotte het volgende lemma, dat algemeen geldig is.

**Lemma 4.19.** *Zij G een compacte groep, en K een ondergroep van G, dan geldt dat*

$$L^2(G)^K \cong \hat{\bigoplus_{(\pi,V)}} V^* \otimes V^K. \tag{4.19}$$

*Bewijs.* Kies voor elke $V$ een orthonormale basis $\{e_i\}$ zodat de eerste $m$ vectoren de ruimte $V^K$ opspannen, deze zijn in het bijzonder dus rechts-K-invariant. Zij nu $f \in L^2(G)^K$, wegens de stelling van Peter-Weyl kunnen we $f$ schrijven in de volgende vorm:

$$f(x) = \sum_{(\pi,V)} \sum_{i,j=1}^{\dim V} C_{\pi ij}\ e_i \otimes e_j(x).$$

Nu geldt voor een $k \in K$ dat $f(xk) = f(x)$,. In het isomorfisme van Peter-Weyl werkt de rechts-actie van G op de tweede vector in het tensor-product via de representatie. We zien dus:

$$f(xk) = \sum_{(\pi,V)} \sum_{i,j=1}^{\dim V} C_{\pi ij}\ e_i \otimes (\pi(k)e_j)(x).$$

We kunnen de twee bovenstaande vergelijkingen dus aan elkaar gelijk stellen, en de orthogonaliteit van de verschillende representaties geruiken. Dit levert op voor elke representatie $(\pi, V)$:

$$\sum_{i,j=1}^{\dim V} C_{\pi ij}\ e_i \otimes e_j(x) = \sum_{i,j=1}^{\dim V} C_{\pi ij}\ e_i \otimes (\pi(k)e_j)(x).$$

Oftewel:

$$0 = \sum_{i=1}^{\dim V} \sum_{j=m+1}^{\dim V} C_{\pi ij}\ e_i \otimes (e_j - \pi(k)e_j).$$

Omdat we hadden aangenomen dat $e_j$ niet meer $K$-invariant is voor $j > m$, moeten de coëfficiënten wel 0 zijn voor $j > m$. We kunnen dus concluderen dat

$$L^2(G)^K \cong \hat{\bigoplus_{(\pi,V)}} V \otimes V^K$$

□

We kunnen nu terug naar $S^2$. In het licht van bovenstaand lemma is het interessant om $V^K$ te bepalen. We zien met directe berekening voor elementen uit $A \in K$:

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(\theta J_3) \tag{4.20}$$

Zij nu $v \in V^K$, dan is dus $\pi(\exp(\theta J_3))v = v$. We kunnen dit omschrijven tot:

$$\frac{\exp(\theta\rho(J_3)) - I}{\theta} v = 0,$$

waar $\rho$ de Lie algebra representatie is die bij $\pi$ hoort. Als we nu het limiet van $\theta$ naar 0 nemen, zien we dat $\rho(J_3)v = 0$. Andersom geldt dit natuurlijk ook: Als $\rho(J_3)w = 0$, dan $w \in V^K$.

We weten echter al uit sectie 3.1 dat $L_3 = i\rho(J_3)$ een complete set eigenvectoren heeft bij eigenwaarden $\{-l, -l+1, \ldots, l\}$ als $\dim V = 2l+1$. De kern van $J_3$ is hiermee eendimensionaal, en $V^K$ dus ook. We concluderen dat

$$V \otimes V^K \cong V$$

Als we dit alles samenvoegen vinden we nu dat

$$L^2(S^2) \cong \widehat{\bigoplus_l} V_l,$$

waarbij de $V_l$ de irreducibele representaties van $SO(3)$ zijn. We kunnen deze natuurlijk identificeren met de harmonische polynomen uit het vorige hoofdstuk, waarvan we bewezen hebben dat ze irreducibel zijn, en dat ze isomorf zijn met $V_l$. We vinden zo dus een bewijs voor Stelling 3.7 zonder gebruik te maken van de stelling van Stone-Weierstrass.

# Bibliografie


[1] M.A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer, 1988.

[2] M.A. Armstrong. *Basic Topology*. Springer, 1997.

[3] A. Deitmar. *A First Course in Harmonic Analysis*. Springer, 2005.

[4] B.P. Rynne en M.A. Youngson. *Linear Functional Analysis*. Springer, 2007.

[5] B. C. Hall. An elementary introduction to groups and representations, 2000. [arxiv:math-ph/0005032].

[6] B. C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Springer, 2013.

[7] Y. Kosmann-Schwarzbach. *Groups and Symmetries: From Finite Groups to Lie Groups*. Springer, 2009.

[8] F. Peter and H. Weyl. Die vollständigkeit der primitiven darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen gruppe. *Mathematische Annalen*, 97(1):737–755, 1927.

[9] L.E. Spence S.H. Friedberg, A.J. Insel. *Linear Algebra*. 2003.

[10] T. Tao. *Analysis I*. Hindustan Book Agency, 2009.

[11] T. Tao. *Analysis II*. Hindustan Book Agency, 2009.

[12] T.Tao. *An Introductrion to Measure Theory*. Graduate Studies in Mathematics, 2011.

[13] J. v. Neumann. Über die analytischen eigenschaften von gruppen linearer transformationen und ihrer darstellungen. *Mathematische Zeitschrift*, 30(1):3–42, 1929.

[14] E. van der Ban. Lecture notes: Lie groups. `http://www.staff.science.uu.nl/~ban00101/lie2014/lie2010.pdf`, 2010.

[15] S. Willard. *General Topology*. Dover Publications, 1970.

[16] A. Zaman. Peter-weyl theorem for compact groups. `http://www.math.toronto.edu/asif/Research_files/peter-weyl.pdf`.