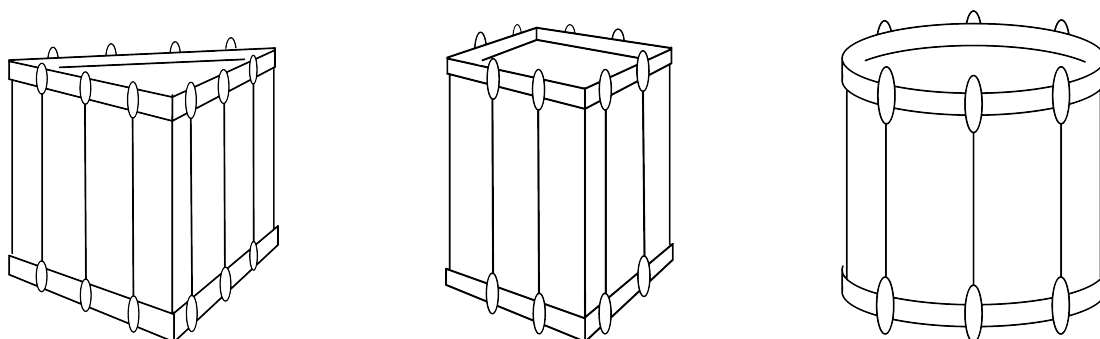


Opgetrommeld voor spectra in de meetkunde

Walter D. van Suijlekom

waltervs@math.ru.nl

2 november 2022



Geachte Rector Magnificus, waarde collega's, beste familie, vrienden en andere aanwezigen

U bent net muzikaal verwelkomd —letterlijk opgetrommeld— door trommelgroep RADAC, zoals dat in de 17e eeuw gebruikelijk was om mensen bij elkaar te roepen in dorpen en steden. U heeft kunnen horen, en misschien zelfs kunnen voelen wat voor een verschillende klanken trommels van verschillende formaten kunnen produceren. Dit zal de rode draad vormen van mijn verhaal van vandaag: het *spectrum van trillingsfrequenties* van een of ander object —zoals een trommel— zeggen duidelijk iets over de meetkundige vorm ervan. Maar zegt het ook alles? De wiskunde hierachter is hoogst interessant, en dat wil ik u vanmiddag graag laten zien, en horen. De tweede boodschap die ik u vanmiddag wil meegeven is dat wiskunde bovenal mensenwerk is, en simpelweg niet zou bestaan zonder de vruchtbare interactie tussen wiskundigen.

Spectra en meetkundige vormen

Laten we beginnen met het woord *spectrum*. In de wiskundige literatuur duikt de term spectrum al vroeg op in het werk van David Hilbert in 1906 om een collectie van frequenties aan te geven.¹⁰ Ruim twintig jaar later neemt John von Neumann het concept over binnen het wiskundig bouwwerk van de kwantummechanica.²¹ Dankzij hun werk

kunnen we nu op dezelfde manier praten over bijvoorbeeld het auditieve spectrum, bestaande uit trillingsfrequenties van een of ander object, of het visuele spectrum, bestaande uit stralingsfrequenties van licht.

Het was echter mijn landgenoot Hendrik Lorentz die als natuurkundige de cruciale wiskundige vraag stelde voor het ontstaan van de zogeheten *spectrale meetkunde*. Ik vind dit zelf een prachtige illustratie van hoe onderzoek op het grensvlak van wis- en natuurkunde in zijn werk gaat, dus neem ik jullie graag even mee naar het begin van de 20e eeuw.

Lorentz was toen al een gevierd en zeer gerespecteerd fysicus. Hij had in 1902 de Nobelprijs ontvangen en was al 25 jaar als hoogleraar aan de Universiteit Leiden verbonden. Ondertussen werd hij veel uitgenodigd voor voordrachten en colleges in het buitenland. Zo ging hij per stoomboot naar de Verenigde Staten om daar colleges te geven, en was dus maanden van huis; hij gaf een voordracht op het Internationale Wiskundecongres van 1908 in Rome, ondertussen genietend van het Italiaanse leven —iets wat ik persoonlijk erg goed kan begrijpen. In oktober 1910 was hij gasthoogleraar in Göttingen waar hij de zogeheten Wolfskehl voordrachten verzorgde. Dat waren maar liefst 6 lezingen in 5 dagen, over zeer gevarieerde onderwerpen.¹⁴

In zijn derde lezing in Göttingen stelt Lorentz dat het electromagnetische stralingsspectrum van een 3-dimensionaal object zich voor hoge frequenties onafhankelijk zou gedragen van de precieze vorm van dat object, en een veelvoud is van diens volume:

Hierbei entsteht das mathematische Problem, zu beweisen, dass die Anzahl der genügend hohen Obertöne zwischen n und $n + dn$ unabhängig von der Gestalt der Hülle und nur ihrem Volumen proportional ist.

[Hier ontstaat het wiskundige probleem te bewijzen dat het aantal voldoende hoge boventonen tussen n en $n + dn$ onafhankelijk is van de vorm van de omhullende en slechts evenredig met het volume ervan.]

Slechts een paar maanden later, eind februari 1911, beantwoordt de jonge wiskundige Hermann Weyl de vraag bevestigend, en uiteraard met de nodige wiskundige precisie.²² Hij was ook werkzaam in Göttingen, en gaf naar aanleiding van Lorentz' vraag een helder bewijs, dat zelfs toepasbaar is in hogere dimensies. Feitelijk is toen de grondslag gelegd voor spectrale meetkunde: het vakgebied in de wiskunde dat zich bezighoudt met de vraag of vormen volledig worden bepaald door hun trillingsspectrum.

In de natuurkunde literatuur uit die tijd is van dit antwoord, of bijvoorbeeld een referentie naar Weyl's werk, niet snel meer iets terug te vinden. Wel schrijft Lorentz een jaar later erover, dit keer niet meer als vraag maar in bevestigende vorm, én dit keer in het Frans:

on démontre que le nombre des modes de vibrations possibles est proportionnel à V et indépendant de la forme du corps¹⁵

[hier wordt aangetoond dat het aantal mogelijke trillingsmodes evenredig is met V en onafhankelijk van de vorm van het lichaam]



Figuur 1: Aankondiging van de Michonis lezingen van Lorentz op het Collège de France in november 2012 [bron: archives du Collège de France].

Dit citaat is afkomstig uit de vijfde en laatste van zijn Michonis lezingen die hij eind november 1912 gaf aan het prestigieuze Collège de France in Parijs. Ik moet toegeven dat ik in voorbereiding op deze lezing eerder dit jaar met rode oortjes in de bibliotheek van het Collège de briefcorrespondentie tussen Lorentz en het instituut zat te lezen — opnieuw in prachtig Frans. Merk trouwens meteen op wat een talenwonder Lorentz is; iets wat hem eerder al de ideale voorzitter van het beroemde Solvay Congres had gemaakt, met deelnemers als Albert Einstein, Marie Curie, Max Planck, Henri Poincaré *et cetera*. Tijdens dat congres kon Lorentz naast zijn uitstekende wetenschappelijke overzicht, ook zijn talenkennis inzetten. Niet alle Franse deelnemers spraken namelijk Duits, of de Duitse deelnemers Engels.¹

Vanwege de politieke onrust in die tijd komt Lorentz hierna niet meer in Duitsland, en ook Göttingen houdt op te bestaan als episch centrum van de wiskunde. We moeten daarom zo'n 50 jaar wachten voor een verdere ontwikkeling van de spectrale meetkunde. In 1966 publiceerde wiskundige Mark Kac een artikel met de naam "Can one hear the shape of a drum" [Kun je de vorm van een trommel horen].¹¹ U kunt begrijpen dat deze titel mij niet alleen als wiskundige treft, maar ook als slagwerker zeer aanspreekt. We stellen ons de trommel voor als een oppervlak en bekijken alle mogelijke trillingsgolven van dit oppervlak die gelijk aan nul zijn aan de rand. Dit is onze trillende trommel: het vel trilt maar de rand van de trommel ligt vast. De vraag is nu: als we alle trillingsfrequenties van het oppervlak kennen, kunnen we dan de vorm van het oppervlak achterhalen?

¹Veel van deze achtergrond is geput uit de twee uitgebreide recent verschenen bibliografieën van Lorentz.^{2,12}

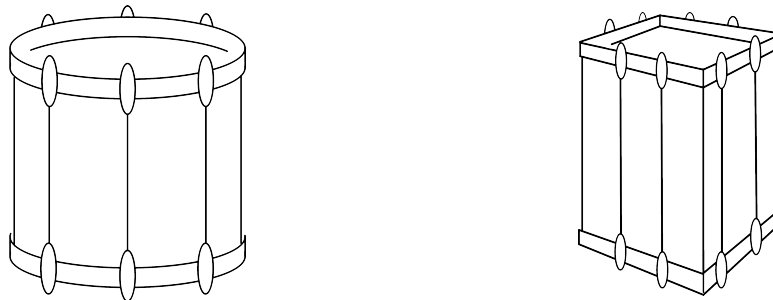
Feitelijk gaf Kac' werk een verfijning van de vraag van Lorentz, en het antwoord van Weyl. Want daarmee was uit het trillingsspectrum in ieder geval het volume, of, in het geval van de trommel de oppervlakte te achterhalen. Merk trouwens op dat dit strookt met uw intuïtie: grote muziekinstrumenten (zoals een contrabas) maken doorgaans een lager geluid dan kleine instrumenten (zoals een viool).

Laat ik een voorbeeld geven: voor de volgende twee trommels



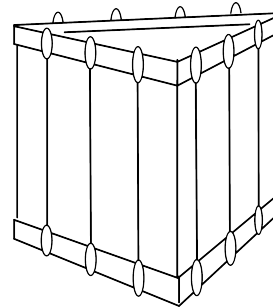
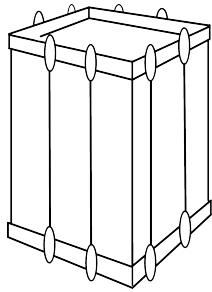
staan in Figuur 2a de eerste 25 trillingsfrequenties uitgezet. De kleine trommel heeft inderdaad hogere frequenties dan de grote, zodat uit het geluid valt af te leiden welke trommel er klinkt.

Maar de vraag van Kac gaat nog een stap verder en bekijkt ook verschillende vormen, zoals een ronde en een vierkanten trommel, in dit geval van gelijk oppervlak:



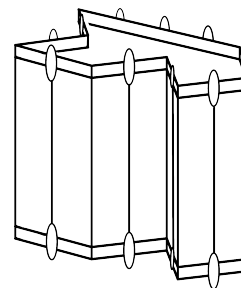
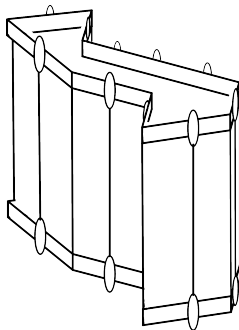
Opnieuw is de vraag of het mogelijk is om het verschil in vorm te horen tussen deze twee trommels, ongeacht hun precieze afmetingen en dus alleen hun vorm. Als we kijken naar de eerste 25 trillingsfrequenties (Figuur 2b) zien we dat deze van elkaar verschillen zodat het antwoord weer bevestigend is. Wat ook opvalt aan deze figuur is dat de frequenties voor beide trommels globaal gezien dezelfde parabolische vorm volgen: dit is een goede illustratie van de wet van Weyl: voor voldoende hoge boventonen hangen deze alleen af van het volume —of in dit geval oppervlakte— van de trommel.

Laten we het nog iets ingewikkelder maken en naar een vierkanten en een driehoekige trommel luisteren:



De eerste 25 trillingsfrequenties staan in Figuur 2c en laten zien dat deze trommels een verschillende geluid maken.

Tot slot, twee trommels met een wat exotischer vorm, van gelijk oppervlak en omtrek:



De eerste 25 trillingsfrequenties staan aangeven in Figuur 2d en het verbluffende resultaat is dat ze identiek trillingsspectrum hebben. Deze twee trommels hebben dus een verschillende vorm, maar klinken precies hetzelfde.

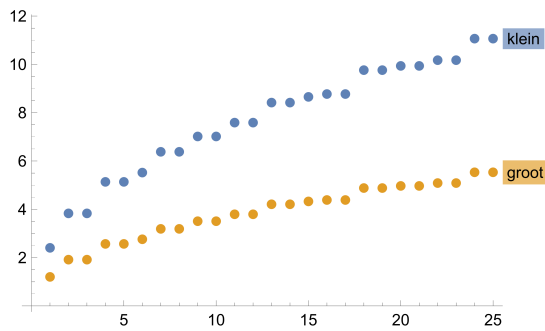
Onze conclusie is dus dat er nog een puzzelstukje ontbreekt als we vormen volledig met behulp van spectra willen beschrijven. Ik zal daarover straks een tipje van de sluier oplichten, maar eerst wil ik nog meer bewijsmateriaal verzamelen voor het gebruik van spectra bij het beschrijven van vormen, en wel in de natuurkunde. Die twee invalshoeken van wis- en natuurkunde vullen elkaar goed aan, en is ook een typerende eigenschap van mijn eigen onderzoek.

Spectra in de natuurkunde

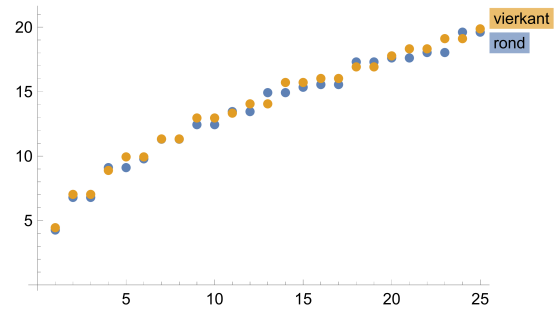
Het was natuurlijk ver voor Lorentz al bekend dat spectra een cruciale rol in de waarne-
ming van samenstelling en vorm was.

Voor het visuele spectrum moeten we terug naar Isaac Newton. Sterker nog, de term spectrum wordt in de natuurkunde door hem geïntroduceerd om aan te geven hoe wit licht is opgebouwd uit licht van verschillende frequenties, iets wat hij al in de 17e eeuw laat zien met behulp van het prisma.

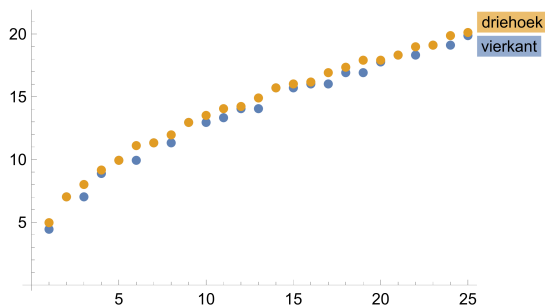
Maar, hoe kunnen we nu vormen meten met behulp van spectra? Laat ik dichtbij huis beginnen: het meten van afstanden doen we namelijk zelf vaak ook al niet meer met een klassieke rolmaat. In plaats daarvan gebruiken we het spectrum van laserlicht:



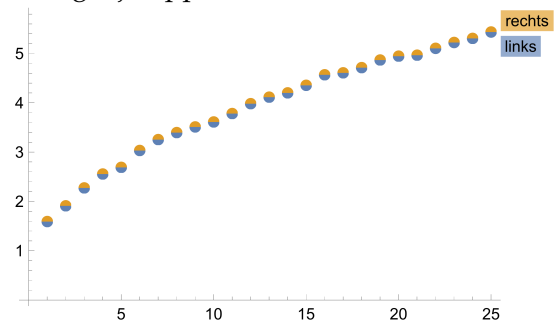
(a) De eerste 25 trillingsfrequenties van twee ronde trommels van verschillende doorsnede.



(b) De eerste 25 trillingsfrequenties van een ronde en een vierkante trommel met gelijk oppervlak.



(c) De eerste 25 trillingsfrequenties van een vierkanten en een driehoekige trommel (gelijkbenig en rechthoekig) met gelijk oppervlak.



(d) De eerste 25 identieke trillingsfrequenties van twee verschillende trommels.

Figuur 2: De eerste 25 trillingsfrequenties van verschillende trommels met elkaar vergeleken.



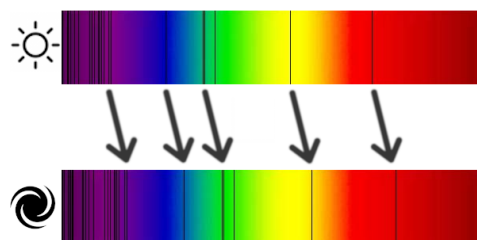
En misschien niet in uw huiskamer, maar dan wel in een lab, analyseren we het spectrum in Röntgenstraling in bijvoorbeeld een elektronenmicroscop, en als we nog verder inzoomen, zijn ook waarnemingen in een deeltjesversneller zoals in Cern gebaseerd op resonantiespectra. Allemaal met als doel de samenstelling, vorm en eventuele snelheid van een object of deeltje spectraal te bepalen.

In de sterrenkunde spelen spectra ook een cruciale rol, simpelweg omdat metingen nooit ter plaatse in ver gelegen sterrenstelsels kunnen worden gedaan. Echter, door goed te kijken naar het visuele spectrum van bijvoorbeeld een ster of cluster, en in het bijzonder naar de locatie van zogeheten absorptielijnen —kleine donkere lijnen in het spectrum— kunnen we de chemische samenstelling van ver gelegen sterren of clusters bepalen, en bijvoorbeeld hun snelheid uitrekenen (Figuur 3). Door dit soort waarnemingen bepalen we de vorm en kromming van het universum door de objecten die er door bewegen spectraal te observeren. Dergelijke waarnemingen hebben zelfs tot de schokkende conclusie geleid dat het universum zelf aan het uitdijen is!

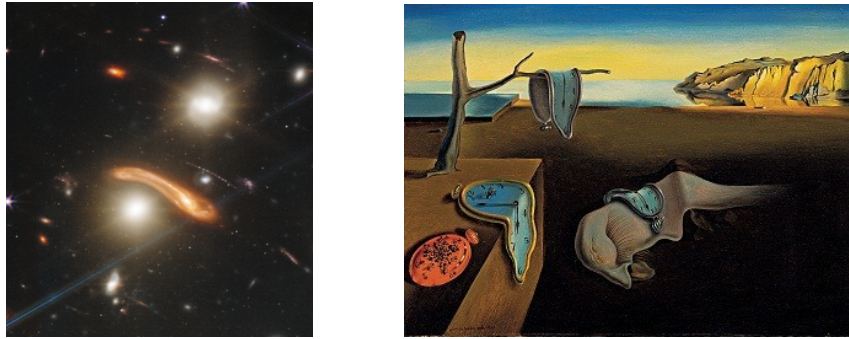
Maar we hoeven ons niet te beperken tot het visuele spectrum, ook voor waarnemingen met behulp van radiotelescopen of met infrarood-telescopen gaat hetzelfde op. In het radiospectrum maken we tegenwoordig foto's die de omgeving van een zwart gat in kaart brengen (Figuur 5), en in het infrarode spectrum heeft zeer recent de James Webb Telescoop de kromming van ruimtetijd wel erg inzichtelijk in een beeld gevat (Figuur 4).

En daar kunnen zwaartekrachtsgolven aan worden toegevoegd: rimpels in de ruimtetijd om ons heen. Het trillingsspectrum dat die golven opleveren zegt ons iets over de vorm van de zwarte gaten of neutronensterren die om elkaar spiraliserend tot een geheel samensmelten (Figuur 6).

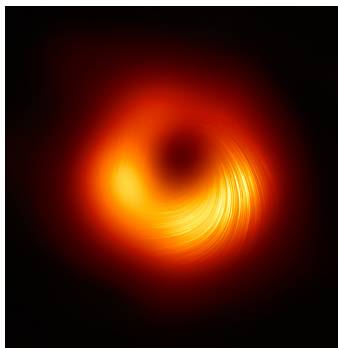
Kortom, eigenlijk zijn alle metingen in de natuurkunde spectraal van aard, zodat dus eigenlijk alle kennis van de fysieke wereld is bepaald door de analyse van spectra. Dit maakt het nog crucialer een wiskundige theorie te hebben die verteld hoe spectra kunnen worden gebruikt in de meetkunde.



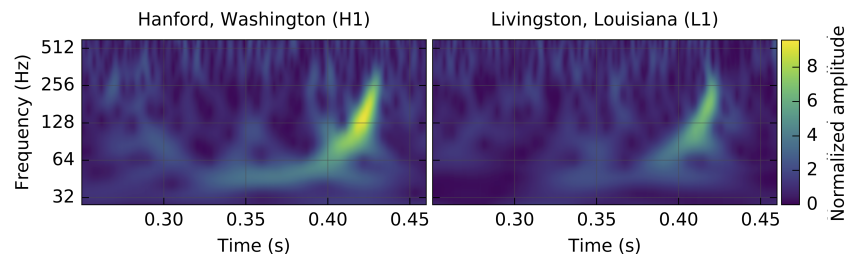
Figuur 3: De absorptielijnen van de zon (boven) zijn roodverschoven voor supercluster BAS11 (onder), bewegend met 7% van de lichtsnelheid.



Figuur 4: Zwaartekracht lenseneffect zoals geobserveerd met de James Webb Telescoop (zoom van cluster SMACS 0723) naast vergelijkbaar vervormde klokken in Salvador Dalí's *La persistència de la memòria* (1931) waarvan de schilder zelf trouwens beweert dat het niet geïnspireerd is op Einstein's relativiteitstheorie.



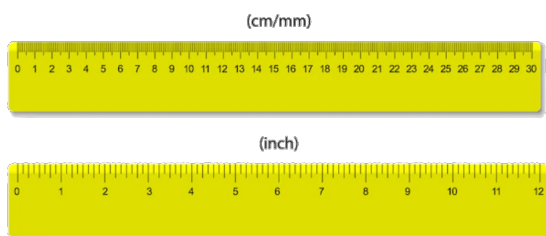
Figuur 5: M87* gezien door de Event Horizon Telescope (EHT); de lijnen laten de polarisatie van licht in de omgeving van de event horizon zien.⁹



Figuur 6: Zwaartekrachtsgolven zoals gemeten door LIGO (GW150914): een rimpeling van de ruimtetijd zelf veroorzaakt door het samensmelten van twee zwarte gaten.¹

Historische opmaat naar niet-commutatieve meetkunde

OK, we weten dus dat natuurkundig gezien alle informatie over de vorm van het universum, op kleine en grote schaal tot ons komt in de vorm van spectra. Maar hoe zit dat wiskundig in elkaar? Is er een wiskundig formalisme om meetkunde te doen slechts met behulp van spectra? Zeker als we bedenken dat er verschillende objecten zijn die toch dezelfde trillingsfrequenties hebben, zoals dat laatste paar trommels van daarnet. Het antwoord is natuurlijk ja —anders stond ik hier niet— maar daarvoor moeten we eerst nog even terug naar het begin van de 20e eeuw. Een kleine waarschuwing vooraf is dat het volgende deel misschien iets technischer zal zijn dan de rest van mijn verhaal. Maar geen zorgen, met een minuut of tien beloof ik dat er de nodige verlichting zal komen.

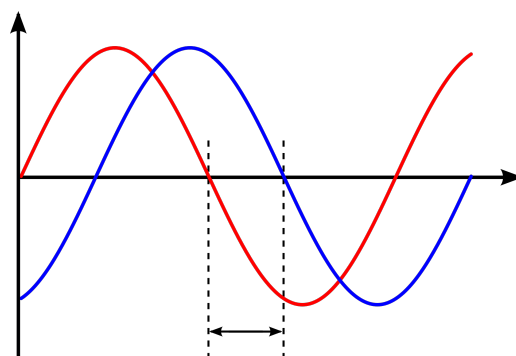


Figuur 7: Het kiezen van een ijk: centimeter versus inch.

een afleiding van de wet van behoud van lading. Einstein was het echter niet eens met Weyl en reageerde scherp in een addendum van het artikel. Het bezwaar van Einstein was dat zo'n ijsymmetrie geen goede fysische aanname kon zijn, want het zou als gevolg hebben dat de locatie van bijvoorbeeld de absorptielijnen in het spectrum van een element afhankelijk is van de afkomst van dat atoom. Dat is fysisch gezien duidelijk niet het geval!

Weyl probeerde het nog te weerleggen in een reactie, maar zonder overtuiging. Echter, een klein decennium later vond zijn idee vruchtbare bodem in de kwantumfysica.^{8,13} De ijsymmetrie van Weyl moest worden vervangen door een *fase*-symmetrie. Wiskundig gezien een kleine aanpassing —een factor i — maar met grote gevolgen. Helemaal als we terugdenken aan onze spectrale aanpak van meetkunde aan de hand van trillingsfrequenties, dan realiseren we ons dat een fase-verschuiving van een trilling de frequentie onveranderd laat (Figuur 8). En omdat we onze meetkunde baseren op dat spectrum, krijgt ijsymmetrie zo een nieuwe betekenis waar ongetwijfeld ook Ein-

In 1918 introduceerde Hermann Weyl het begrip *ijksymmetrie*.^{17–19,23,27} Een goed voorbeeld van ijk is de keuze tussen inches of centimeters, zie Figuur 7. Het uitgangspunt van Weyl was dat natuurwetten onveranderd zouden blijven na aanpassen van de schaal, met andere woorden, na het kiezen van een ijk. Deze hypothese maakte het mogelijk om een meetkundige beschrijving te geven van electromagnetisme, en de symmetrie te gebruiken voor



Figuur 8: Een fase-verschuiving laat de trillingsfrequentie van een golf onveranderd.

stein zich in had kunnen vinden. Weyl omarmde dit idee in 1929²⁴ en schreef er zelf over²⁵

... durch die Quantentheorie, glaube ich, können wir mit großer Bestimmtheit den Finger auf den Punkt legen, in welchem meine Theorie irrte: die Eichinvarianz verbindet die electromagnetische Potentiale nicht mit den g_{ij} der Gravitation, sondern mit den ψ_q der Materiefeldes. Das konnte ich freilich 1918 nicht wissen! Damals waren diese ψ noch völlig unbekant.

[... door de kwantumtheorie, geloof ik dat we met grote zekerheid de vinger kunnen leggen op het punt waar mijn theorie niet klopte: de iksymmetrie verbindt de electromagnetische potentialen niet met de g_{ij} van de gravitatie maar met de ψ_q van het materieveld. Dat had ik in 1918 natuurlijk niet kunnen weten! In die tijd waren deze ψ nog totaal onbekend.]

Overigens is Weyl's afleiding van de wet van behoud van lading nog steeds geldig, en feitelijk een toepassing van de tweede Stelling van Noether.³ Interessant genoeg publiceerde Emmy Noether haar werk hierover¹⁶ ook in 1918, net als Weyl's eerste artikel. Ze bewijst daarin dat er een één-op-één verband bestaat tussen symmetrieën en behouden grootheden. Toegepast op Weyl's iksymmetrie geeft dit de welbekende wet van behoud van lading. Tegenwoordig staan haar Stellingen centraal in de theoretische en mathematische fysica, maar in die tijd was die erkenning ver te zoeken: niet vanwege haar kwaliteiten maar om haar geslacht. Zo werd haar eerste poging tot *Habilitation* afgewezen simpelweg omdat ze geen mannelijke kandidaat was. Er is een bekende anecdote dat Hilbert daarop protesteerde dat hij niet inzag waarom het geslacht van de kandidaat ertoe zou doen; "per slot van rekening was dit een universiteit, geen badhuis!" Zonder direct resultaat, en dus gaf Noether dan maar colleges onder de naam van Hilbert.²⁶

Een grote stap in de ontwikkeling van het principe van iksymmetrie wordt begin jaren 1950 gezet. Door Yang en Mills,²⁸ en onafhankelijk daarvan door Utiyama,²⁰ werd electromagnetisme gegeneraliseerd, waarbij zogeheten *niet-abelse* ijkvelden het electromagnetische veld generaliseerden.¹⁷ In eerste instantie leek dit een theoretische exercitie, maar al snel bleken deze theorieën de bouwstenen van de deeltjesfysica te worden. De niet-abelse ijkvelden bleken de krachtdragers te zijn van de zwakke en sterke kernkrachten, net zo als het electromagnetische veld kan worden gezien als drager van de electromagnetische kracht. Welnu, in plaats van een enkele fase zoals in het werk van Weyl, geven niet-abelse ijkvelden aanleiding tot een algemener idee van fase. En hoewel Weyl op dezelfde plek werkte als Yang in die tijd —in Princeton— leek hij niet op de hoogte van deze ontwikkelingen, die hij echter ongetwijfeld zou hebben omarmd als staande op het kruispunt van iksymmetrie en niet-abelse groepentheorie.²⁷ Ik heb het zelf altijd als ontzettend intrigerend ervaren dat abstracte wiskunde zo veel te zeggen heeft over hoe de natuur zich gedraagt op de schaal van de elementaire deeltjes. Sterker nog, het was voor mij de aantrekking naar het grensvlak tussen de wis- en natuurkunde.



Figuur 9: Alain Connes (r) naast de Slinger van Foucault in het Huygensgebouw, Radboud Universiteit [foto Bert Beelen, 2016].

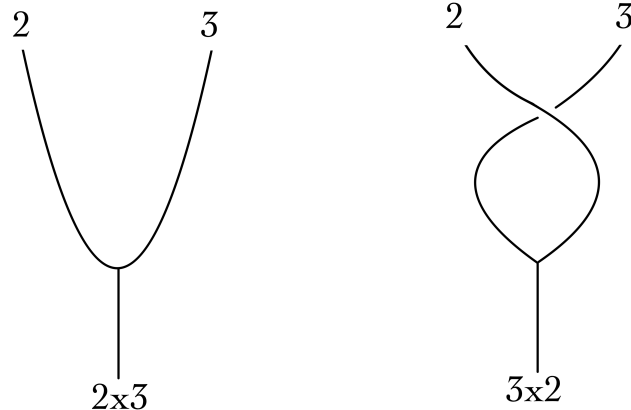
En we kunnen zelfs nog een stap zetten, en daarmee komen we tot de kern van mijn onderzoeksgebied. De combinatie van het niet-abelse ijkprincipe —en dus deeltjesfysica— met de spectrale aanpak van meetkunde leidt namelijk onvermijdelijk tot **niet-commutatieve meetkunde**. De iksymmetrie van Yang en Mills blijkt namelijk te kunnen worden gerealiseerd als symmetrie van het trillingspectrum van een niet-commutatieve ruimte: een trillende niet-commutatieve trommel dus. Zo lukt het ons om naast zwaartekracht — met Einstein een gevolg van de kromming van ruimtetijd— ook de elektromagnetische krachten en de kernkrachten meetkundig te beschrijven.

Tijd om terug te keren naar de wiskunde, want hoewel ik het nu gemotiveerd heb vanuit natuurkundig perspectief, is de niet-commutatieve meetkunde een vakgebied dat diep is geworteld in de wiskunde, getuige deze leerstoel. De grondlegger van dit vakgebied is Frans wiskundige Alain Connes. Hij won in 1982 de Field's Medaille voor zijn classificatie van von Neumann algebras —een concept dat inderdaad teruggaat naar de eerste dagen van de kwantummechanica. Hij werd al snel daarna hoogleraar aan het Collège de France, ruim 60 jaar na Lorentz' Michonis lezingen aldaar. In de jaren 1980 en 1990 combineerde hij spectrale meetkunde met spectra van mogelijk niet-commuterende coördinaten. Het was precies deze combinatie waarmee hij de oude vraag van Kac bevestigend kon beantwoorden: door “lokaal” te luisteren naar een trommel, kun je zijn vorm volledig bepalen.^{4,5} Het is alsof je langs de rand van de trommels loopt en luistert naar de klank, om op deze manier te ontrafelen wat de globale vorm is van de trommel.

En deze spectrale aanpak is dus niet alleen toepasbaar op trommels van verschillende vormen, of hoger-dimensionale meetkundige objecten, het gaat ook op voor zogeheten niet-commutatieve ruimtes. Zoals gezegd zorgt dit voor toepassingen in de deeltjesfysica, maar om ervoor te zorgen dat u niet naar huis gaat zonder een klein idee te hebben van

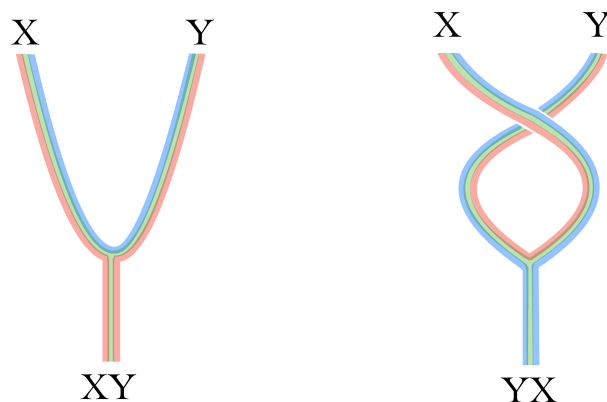
wat er dan niet-commutatief is, een voorbeeld.

Als je getallen zoals 2 en 3 met elkaar vermenigvuldigt, maakt de volgorde niet uit: 2×3 is hetzelfde als 3×2 . Deze commutatieve algebra leren mijn kinderen al op school, en daar is natuurlijk helemaal niets mis mee. We zouden dit als volgt in een diagram kunnen samenvatten:



Op het kruispunt worden de getallen 2 en 3 met elkaar vermenigvuldigd, waarbij in het rechter diagram de volgorde eerst nog wordt omgedraaid. Omdat beide diagrammen gelijk zijn —de draaiing rechts kan eenvoudig ongedaan worden gemaakt zonder het diagram te veranderen— illustreert dit het commuteren van vermenigvuldiging.

In de meetkunde waar ik me mee bezig houd gelden andere rekenregels, zodat vermenigvuldiging niet per sé commutatief is. Een diagrammatische voorstelling van niet commuteren is met behulp van strookjes gekleurd papier, zoals hier afgebeeld:



Links geeft duidelijk een andere resultaat dan rechts, en dus is deze bewerking niet-commutatief. Als de kenner hier matrix-vermenigvuldiging in herkent, is dat volkomen terecht want dat is precies wat ik hier probeer voor te stellen. Samenvattend geldt dus dat onze coördinaten X en Y niet commuteren:

$$XY \neq YX$$

Natuurkundig gezien stellen de strookjes papier trouwens een ruimte van interne vrijheidsgraden voor —precies de eerder genoemde ijkvrijheidsgraden. Zo stelt rood bijvoorbeeld een electron voor, terwijl blauw een neutrino is, en het strookje geeft alle mogelijke superposities daarvan weer. Als we coördinaten kiezen die voldoen aan dergelijke rekenregels, is het mogelijk de interne vrijheidsgraden in de meetkunde ‘in te bakken’. Kromming van zo’n niet-commutatieve ruimte geeft dan, in het verlengde van Einstein’s relativiteitstheorie, aanleiding tot een meetkundige beschrijving van alle vier fundamentele natuurkrachten: zwaartekracht, de electromagnetische kracht en de zwakke en sterke kernkracht.

Vooruitkijkend naar de komende jaren wil ik werken aan een begrip van spectrale meetkunde als er slechts een deel van het spectrum bekend is. Het huidige formalisme van de niet-commutatieve meetkunde gaat namelijk uit van kennis van het volledige spectrum bestaande uit alle trillingsfrequenties. Dat is niet erg realistisch: natuurkundig gezien is het duidelijk dat een volledig trillingsspectrum nooit beschikbaar is. Zo heeft een detector altijd een bepaalde bandbreedte en resolutie. En toch denken we dat we met onze spectroscopie een volledig beeld vormen van de werkelijkheid, inclusief kromming en afstanden in ons eigen universum. Kennelijk benaderen we met onze beperkte kennis van het spectrum toch de continue werkelijkheid. Denk nog eens terug aan de trommel: ook met ons beperkte gehoor lukt het ons prima het verschil in grootte van de trommels te bepalen. Zelfs als het gehoorbereik met het bereiken van een hogere leeftijd wat is afgenomen.

Ik wil onderzoeken hoe de wiskunde hierachter in elkaar steekt: kunnen we bewijzen dat we met de kennis van een deel van het spectrum kunnen convergeren naar de oorspronkelijke meetkundige vorm? In hoeverre is meetkunde op deze manier een *emergent* verschijnsel, voortkomend uit een eindig aantal trillingen? Kunnen we spreken van meetkunde op een bepaalde schaal gezien, of met een bepaalde resolutie gemeten?

Zo’n schaalafhankelijke meetkunde is tegelijk een cruciale voorbereiding op het formuleren van de hoognodige kwantumtheorie in het wiskunde bouwwerk van de niet-commutatieve meetkunde. Op kleinere schaal zullen kwantumeffecten namelijk een rol gaan spelen in de voortbeweging van elementaire deeltjes, en dus in de meetkundige formulering van de deeltjesfysica. Feitelijk kan dit worden gezien als de heilige graal van dit toepassingsgebied, en mijn onderzoeksgebied in het bijzonder.

Ik heb vanmiddag veel van mijn onderzoek uitgelegd aan de hand van trommels en met voorbeelden uit de natuurkunde. Dit zijn echter slechts metaforen voor mijn onderzoek en mijn vakgebied. Mijn dagelijkse werk ziet er wel wat anders uit, en zonder u daar ver in mee te nemen, leek het me toch goed om u hier een vluchtige blik op te laten

in het bijzonder van de wiskunde. Zo ontstaat een duurzaam netwerk van wetenschappers die elk met elkaar in verbinding staan en als dat mogelijk of zinvol is, ook tussen de vakgebieden in. En dan zullen er ook altijd onderzoekers zijn die dicht bij de maatschappij staan om daar voor hun toepassingen te kunnen putten uit het zo belangrijke meer ongebonden onderzoek. De recente ontwikkelingen wat betreft dergelijke impact bij NWO zijn positief, en ik zal me er de komende jaren sterk voor blijven maken, onder andere als lid van de adviestafel wiskunde.

Iets wat overigens wel pijnlijk duidelijk is geworden uit mijn verhaal, is dat dit vooral een mannelijke aangelegenheid lijkt te zijn. Dat is natuurlijk volkomen onterecht maar betekent dat er nog een flinke slag gemaakt moet worden. Nogmaals, wiskunde is mensenwerk, geen mannenwerk! Gelukkig is de situatie op de universiteit onder studenten nu enorm verbeterd, maar bij elke volgende stap in de wetenschappelijke carrière vallen er meer vrouwen af dan mannen. En daarbij moeten we er ook voor zorgen dat we met ons beleid niet worden ingehaald door de werkelijkheid en in bredere zin inclusief zouden moeten zijn.

Maar hoe zie ik mijn onderzoeksgroep dan voor me? Ik zou het willen vergelijken met het beklimmen van een berg. Er is hier natuurlijk een groot risico om in cliché's te vervallen, maar vanuit een Nederlands perspectief is het niet zo vreemd om te dromen van bergen als er gewoon geen in de buurt zijn. In mijn onderzoek zie ik mijzelf wandelend op een bergrug, al lopende genietend van het uitzicht en alle schoonheid die er te ontdekken valt. Jonge mensen met verschillende kwaliteiten en achtergronden sluiten zich aan bij de reis; anderen vertrekken om een nieuw pad te vinden naar een andere bergtop. Zo zou ik graag zien dat mijn onderzoeksgroep de komende jaren blijft bloeien, in het langduriger streven om het uitzicht vanaf de top te bereiken.

Voor mij neemt de interactie met andere wis- en natuurkundigen dus een centrale plaats in. Natuurlijk, het is geweldig om een wiskundig inzicht te hebben, of een natuurkundig verschijnsel in een formule te kunnen vangen. Maar het delen van inzicht met een collega of een student is toch wel wat het echt de moeite waard maakt.

Ik kom daarbij ook meteen op een ander punt van meer filosofischer aard, die gaat over hoe ik wiskunde zie. Want ook al vormen formules, stellingen, bewijzen *et cetera* de taal waarmee wiskundigen elkaar verstaan, de kern is wat mij betreft het delen van het achterliggend intuïtieve denkbeeld. Ik zie het als volgt: aan de ene kant gebruikt de wiskundige zijn logica als basisgereedschap, aan de andere kant is er een immateriële werkelijkheid van wiskundige objecten. Een volledig op axioma's en deductie gebaseerde wiskunde —zoals Hilbert die graag had gezien— is namelijk gedoemd te mislukken, en wel omdat de Stelling van Gödel het bestaan aantoonde van beweringen die wel waar zijn, maar niet bewijsbaar. Zo'n bewering zou dan een object zijn in die immateriële werkelijkheid, en staat zo losgekoppeld van de logica die tot de ogenschijnlijke paradox leidt. Alain Connes verwoordt het ontrafelen van deze immateriële schoonheid als volgt^{6,7}

Cette réalité dont je parle, du fait qu'elle n'est localisable ni dans l'espace ni dans le temps, donne, lorsqu'on a la chance d'en dévoiler une infime partie, une sensation de jouissance extraordinaire par le sentiment d'intemporalité qui s'en dégage.



Figuur 12: Vioolconcert van Benjamin Britten; duet tussen slagwerk en viool, einde van deel I.

[Deze werkelijkheid waarover ik spreek, is niet lokaliseerbaar, noch in ruimte noch in tijd, en geeft, wanneer men de kans heeft om er een klein stukje van te ontsluiëren, een gevoel van buitengewoon genot door het gevoel van tijdloosheid dat ervan uitgaat.]

Om dit voor niet-wiskundigen enigszins begrijpelijk te maken, zal ik het proberen uit te leggen aan de hand van muziekbeleving. In Figuur 12 ziet u de bladmuziek van een passage uit het vioolconcert van Benjamin Britten, aan het einde van het eerste deel. Het is een prachtig samenspel tussen viool en slagwerk, een stuk dat ik zelf zo'n twintig jaar geleden ook heb mogen spelen als slagwerker in het VU-orkest, nota bene met Janine Jansen als solist. Het notenschrift, tempoduidingen *et cetera* in de muziek zou ik willen vergelijken met formules en bewijzen in de wiskunde. Het zorgt ervoor dat musici elkaar verstaan, maar uiteindelijk is het onderschikt aan de achterliggende, meer intuïtieve schoonheid die via die taal met elkaar gedeeld kan worden. De schoonheid van de wiskunde heeft veel overeenkomsten met die muzikale schoonheid, en de manier waarop die met elkaar gedeeld wordt tijdens bijvoorbeeld een orkestuitvoering.

Met mijn verhaal van vanmiddag hoop ik u in ieder geval een klein stukje van de schoonheid van mijn wiskunde te hebben laten zien. Ik hoop dat u net als een luisteraar van een muziekstuk die misschien niet het volledige notenschrift kent, zonder kennis van formules of bewijzen toch heeft kunnen meegenieten van deze spectrale symfonie van de meetkunde.

Dankwoord

Tot slot, een paar woorden van dank.

Hoewel dit een leerstoel in de wiskunde betreft, moge het duidelijk zijn dat mijn sterke motivatie voor het doen van deze wiskunde komt uit de natuurkunde. Die interesse is lang geleden gewekt, onder andere in de natuurkundelessen op het VWO Jan Arentsz. Veel dank aan dhr. Zwagerman en wijlen dhr. Koch, van wie vandaag de dochter aanwezig is.

Tijdens mijn studie natuurkunde in Amsterdam was mijn afstudeerbegeleider dhr Gerard Bauerle. Hij heeft mij laten kennismaken met het vakgebied van de niet-commutatieve meetkunde, nota bene met een onderwerp uit de snarentheorie! Ik heb inhoudelijk natuurlijk veel van hem geleerd, maar ook de lessen over hoe om te gaan met een gevarieerd publiek kreeg ik toen al van hem.

Na mijn studie natuurkunde heb ik een jaar wiskunde gestudeerd in Amsterdam, onder begeleiding van Klaas Landsman. Hoewel ik natuurlijk stiekem al lang bezig was met wiskunde op het grensvlak met natuurkunde, was dit het formele begin van mijn carrière als mathematisch fysicus. Het contact dat ik in de jaren erna —toen ik promovendus was in Italië— met Klaas heb gehouden was erg fijn, en zorgde ervoor dat ik na nog een korte tussenstop in Bonn in 2007 kon beginnen als postdoc in de groep van Klaas hier in Nijmegen, waar hij ondertussen naar toe was verhuisd. Ik ben hem zeer dankbaar voor alle steun in de jaren die volgden, tot en met de huidige benoeming aan toe.

In het verlengde daarvan geldt dat natuurlijk ook voor mijn collega's bij de wiskunde afdeling, binnen IMAPP en in de Faculteit, tot en met de huidig plaatsvervangend rector aan toe.

My PhD supervisors in Italy were Ludwik Dabrowski and Gianni Landi. I had the chance to be in Trieste as a PhD student in an incredibly inspiring time. In addition to the richness that the country has to offer, Trieste has been a very active center for noncommutative geometry, in particular for the “rolling of quantum spheres”. So I'd like to thank both of them for their guidance and their support.

I have been working with Alain Connes for almost 10 years now, and this has been incredibly inspiring. His enthusiasm when we talk about a particular problem, behind a chalkboard for example, but also increasingly more often via zoom, is very infectious and I like to spread it further to for example my students.

Veel dank aan alle vrienden die ik heb leren kennen tijdens studie, in de muziek of daarbuiten. Van het delen van een kantoor tijdens onderzoeksstages tot bandrepetities in kleine oefenruimtes, van de voorbereiding op halve marathons tot en met massale orkestrepetities.

Mijn ouders en zussen wil ik graag bedanken, voor hun steun en eindeloze geduld in het proberen te begrijpen van mijn vak, maar ook deze toch wel wat vreemde academische wereld, zie bijvoorbeeld ook deze hele entourage van vanmiddag. En hoewel zij niet meer onder ons zijn, ben ik ook mijn grootouders dankbaar, en mijn opa Otto in het bijzonder: zij hebben een belangrijke rol gespeeld in mijn ontwikkeling, en hebben mij

gemotiveerd door te gaan op het door mij gekozen pad, om tegelijkertijd oog te houden voor het bredere geheel en me daar te blijven ontwikkelen. Net zo wil ik mijn schoonfamilie graag bedanken: ook voor hen is die wiskunde een nogal ongrijpbare werkelijkheid, maar dat betekent niet dat er niet kon worden meegedacht, over bijvoorbeeld de titel van deze oratie. Bedankt daarvoor!

Ik heb een ongelooflijk lief gezin om mij heen: Daniël, Joris en Leonora, jullie zorgen ervoor dat papa na zijn werk in één ruk weer in de wereld staat! En we maken voor mijn werk samen zo veel leuke dingen mee, zoals dit feest vandaag maar ook alle reisjes die we samen hebben gemaakt naar zulke mooie plekken over de hele wereld! Mathilde, dank je voor de kleur die jij aan het hele spectrum hebt gegeven en voor je oneindige steun; voor de mooie dingen die we samen hebben meegemaakt, tot en met de muziek waarin we elkaar hebben gevonden.

Ik heb gezegd

Referenties

- ¹ B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016) 061102.
- ² F. Berends and D. van Delft. *Lorentz: Gevierd fysicus, geboren verzoener*. Prometheus, 2019.
- ³ K. A. Brading. Which symmetry? Noether, Weyl, and conservation of electric charge. *Stud. Hist. Philos. Sci. B Stud. Hist. Philos. Modern Phys.* 33 (2002) 3–22.
- ⁴ A. Connes. Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry. *Commun. Math. Phys.* 182 (1996) 155–176.
- ⁵ A. Connes. On the spectral characterization of manifolds. *J. Noncommut. Geom.* 7 (2013) 1–82.
- ⁶ A. Connes, A. Lichnerowicz, and M. P. Schützenberger. *Triangle de pensées*. Editions Odile Jacob, 2000.
- ⁷ A. Connes, A. Lichnerowicz, and M. P. Schützenberger. *Triangle of thoughts*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 2000 French original by Jennifer Gage.
- ⁸ V. Fock. Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt. *Z. Phys* 39 (1926) 226.
- ⁹ C. Goddi et al. Polarimetric Properties of Event Horizon Telescope Targets from ALMA. *Astrophys. J. Lett.* 910 (2021) L14.

- ¹⁰ D. Hilbert. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Vierte Mitteilung). *Gött. Nachr.* (1906) 157–209.
- ¹¹ M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* 73 (1966) 1–23.
- ¹² A. J. Kox. *Hendrik Antoon Lorentz. Natuurkundige (1853–1928)*. Balans, 2019.
- ¹³ F. London. Quantummechanische Deutung der theorie von Weyl. *Z. Phys.* 42 (1927) 375.
- ¹⁴ H. Lorentz. Alte un neu Fragen der Physik. *Phys. Zeitschrift.* 11 (1910) 1234.
- ¹⁵ H. Lorentz. *Les théories statistiques en thermodynamique*. Teubner, Berlin, 1916. Dunoyer, Conférences faites au Collège de France en novembre 1912.
- ¹⁶ E. Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen* (1918) 235–257.
- ¹⁷ L. O’Raifeartaigh, editor. *The dawning of gauge theory*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited and with introductory essays by Lochlainn O’Raifeartaigh.
- ¹⁸ N. Straumann. Early history of gauge theories and weak interactions. Invited talk at PSI Summer on Physics with Neutrinos, Zuz, Switzerland (August 4-10, 1996) [arXiv:hep-ph/9609230].
- ¹⁹ N. Straumann. Hermann Weyl and the early history of gauge theories. In *Symmetries in algebra and number theory (SANT)*, pages 173–189. Universitätsverlag Göttingen, Göttingen, 2009.
- ²⁰ R. Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.* 101 (1956) 1597.
- ²¹ J. von Neumann. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Math. Ann.* 102 (1930) 49–131.
- ²² H. Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). *Math. Ann.* 71 (1912) 441–479.
- ²³ H. Weyl. Gravitation und Elektrizität. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1918) 465–480.
- ²⁴ H. Weyl. Gravitation and the electron. *PNAS* 15 (1929) 323–334.
- ²⁵ H. Weyl. 50 Jahre Relativitätstheorie. *Naturwissenschaften* 38 (1930) 73–83.
- ²⁶ H. Weyl. Emmy noether 1882–1935. *Scripta Mathematica* 3 (1935) 201–220. (WGA 3:425–444).

²⁷ C. N. Yang. Hermann Weyl's contribution to physics. In *Hermann Weyl, 1885–1985*, pages 7–21. Eidgenössische Tech. Hochschule, Zürich, 1986.

²⁸ C.-N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.* 96 (1954) 191–195.