De wiskundige werkelijkheid

Walter van Suijlekom

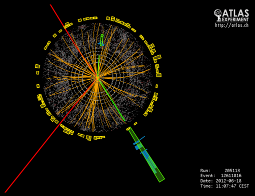
Wiskunde en poëzie - KNAW - 27 november 2024

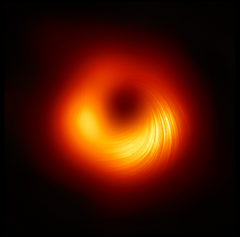
Radboud Universiteit

Wat is het ‘object’ van de wiskunde?

Wat is het ‘object’ van de wiskunde?

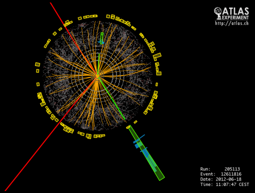
- Het ’object’ dat een natuur-, scheikundige of sterrenkundige bestudeert is de structuur en de organisatie van **materie**.





Wat is het ‘object’ van de wiskunde?

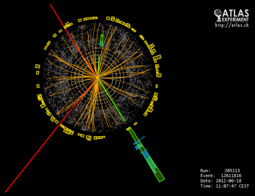
- Het ’object’ dat een natuur-, scheikundige of sterrenkundige bestudeert is de structuur en de organisatie van **materie**.

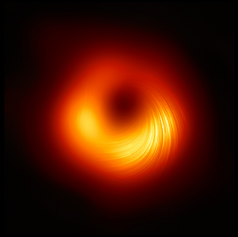


- Dit berust op de *a priori* aanname dat een externe materiële wereld bestaat.

Wat is het ‘object’ van de wiskunde?

- Het ’object’ dat een natuur-, scheikundige of sterrenkundige bestudeert is de structuur en de organisatie van **materie**.

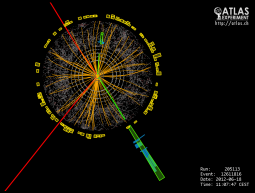




- Dit berust op de *a priori* aanname dat een externe materiële wereld bestaat.
- Maar hoe zit dit voor de wiskundigen? Hebben zij een dergelijk object?

Wat is het ‘object’ van de wiskunde?

- Het ’object’ dat een natuur-, scheikundige of sterrenkundige bestudeert is de structuur en de organisatie van **materie**.



- Dit berust op de *a priori* aanname dat een externe materiële wereld bestaat.
- Maar hoe zit dit voor de wiskundigen? Hebben zij een dergelijk object?
- Bestaat er zoiets als een wiskundige realiteit? Of zijn het ‘slechts’ formules?

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Priemgetallen: zeef van Eratosthenes

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs.

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs.

Stel dat $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *een eindige lijst is van priemgetallen.*

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs.

Stel dat $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *een eindige lijst is van priemgetallen.*
Bekijk het getal $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs.

Stel dat $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *een eindige lijst is van priemgetallen.*
Bekijk het getal $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.
Dan is m niet te delen door alle priemgetallen op onze lijst.

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs.

Stel dat $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *een eindige lijst is van priemgetallen.*
Bekijk het getal $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.
Dan is m niet te delen door alle priemgetallen op onze lijst.
Dus is m zelf een priemgetal, of het is deelbaar door een nieuw priemgetal.

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs.

Stel dat $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *een eindige lijst is van priemgetallen.*
Bekijk het getal $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.
Dan is m *niet te delen door alle priemgetallen op onze lijst.*
Dus is m *zelf een priemgetal, of het is deelbaar door een nieuw priemgetal.*
In beide gevallen staat dit nieuwe priemgetal niet op onze lijst en dus is de eindige lijst niet compleet.

Priemgetallen

(d.w.z. gehele getallen alleen deelbaar door zichzelf en door 1)

Stelling (Euclides, ca. 300 v. Chr.)

Er zijn oneindig veel priemgetallen

Bewijs.

Stel dat $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ *een eindige lijst is van priemgetallen.*
Bekijk het getal $m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$.
Dan is m niet te delen door alle priemgetallen op onze lijst.
Dus is m zelf een priemgetal, of het is deelbaar door een nieuw priemgetal.
In beide gevallen staat dit nieuwe priemgetal niet op onze lijst en dus is de eindige lijst niet compleet.
QED

Een poëtisch bewijs

[uit S. Hart, *Once upon a prime*]

What if we had a list of all primes, a finite list? It would start with 2, then 3, then 5.
We could multiply all the primes together, and add 1 to make a new number.
The number is 2 times something plus 1, so 2 can't divide it.
The number is 3 times something plus 1, so 3 can't divide it.
The number is 5 times something plus 1, so 5 can't divide it.
None of the primes on our list can divide it.
Either our number is prime, or a new prime not on our list divides it.
Either way, the list isn't complete. It can't be done.
There can't be a finite number of primes.
QED

Mandelbrotverzameling

$$\boxed{z \longmapsto z^2 + c}$$

Mandelbrotverzameling

$$\boxed{z \longmapsto z^2 + c}$$

- z en c stellen hier punten voor in het vlak

Mandelbrotverzameling

$$\boxed{z \longmapsto z^2 + c}$$

- z en c stellen hier punten voor in het vlak
- voor elk punt c bestuderen we wat er gebeurt als we *itereren*:

$$z \longmapsto z^2 + c \longmapsto (z^2 + c)^2 + c \longmapsto \cdots$$

waarbij we beginnen in $z = 0$.

Mandelbrotverzameling

$\boxed{z \longmapsto z^2 + c}$

- z en c stellen hier punten voor in het vlak
- voor elk punt c bestuderen we wat er gebeurt als we *itereren*:

  $$z \longmapsto z^2 + c \longmapsto (z^2 + c)^2 + c \longmapsto \cdots$$

  waarbij we beginnen in $z = 0$.
- voor sommige punten neigt dit naar oneindig, bijv $c = 1$:

  $$0 \longmapsto 1 \longmapsto 1 + 1 \longmapsto 2^2 + 1 \longmapsto \cdots$$

Mandelbrotverzameling

$\boxed{z \longmapsto z^2 + c}$

- z en c stellen hier punten voor in het vlak
- voor elk punt c bestuderen we wat er gebeurt als we *itereren*:

$$z \longmapsto z^2 + c \longmapsto (z^2 + c)^2 + c \longmapsto \cdots$$

  waarbij we beginnen in $z = 0$.
- voor sommige punten neigt dit naar oneindig, bijv $c = 1$:

$$0 \longmapsto 1 \longmapsto 1 + 1 \longmapsto 2^2 + 1 \longmapsto \cdots$$

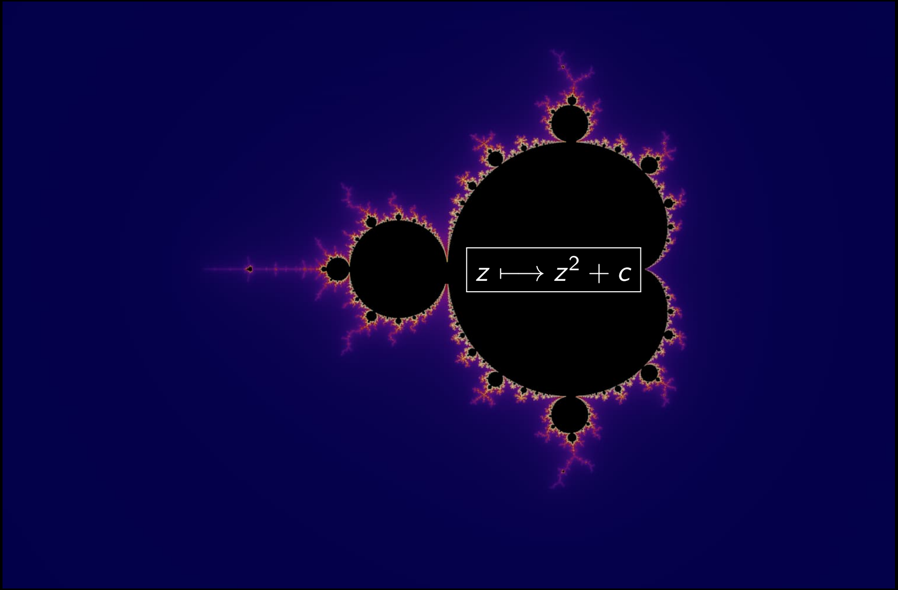
  voor andere niet, bijvoorbeeld $c = -1$:

$$0 \longmapsto -1 \longmapsto 0 \longmapsto -1 \longmapsto \cdots$$

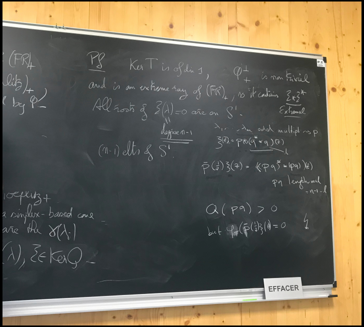
Mandelbrotverzameling

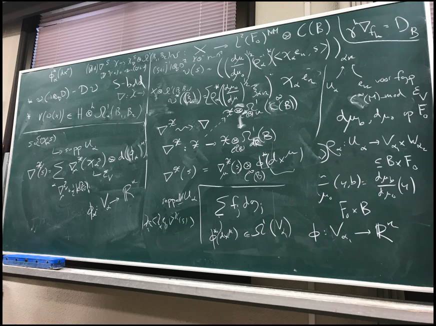
$$\boxed{z \longmapsto z^2 + c}$$

Mandelbrotverzameling

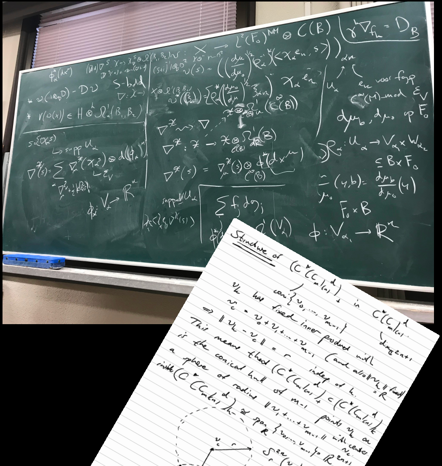


De wiskundige werkelijkheid





De wiskundige werkelijkheid



De wiskundige werkelijkheid

[Uit A. Connes, A. Lichnerowicz, and M. P. Schützenberger. *Triangle of thoughts*, 2001]

> Because this reality cannot be located in space or time, it affords —when one is fortunate enough to uncover the minutest portion of it— a sensation of extraordinary pleasure through the feeling of timelessness that it produces.

De wiskundige werkelijkheid

[Uit A. Connes, A. Lichnerowicz, and M. P. Schützenberger. *Triangle of thoughts*, 2001]

Because this reality cannot be located in space or time, it affords —when one is fortunate enough to uncover the minutest portion of it— a sensation of extraordinary pleasure through the feeling of timelessness that it produces.

Deze werkelijkheid waarover ik spreek, is niet lokaliseerbaar, noch in ruimte noch in tijd, en geeft —wanneer men de kans heeft om er een klein stukje van te ontsluieren— een gevoel van buitengewoon genot door het gevoel van tijdloosheid dat ervan uitgaat.